Klausur 1A SS 2010 / Test 2015

1. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen mit größtem Primfaktor 3 und genau 8 Teilern.

(4 Punkte)

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a = 2772$ und $b = 390$.

(4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{kgV}(a, \mathrm{ggt}(a,b)) = a$.

(4 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche werden 2 Punkte abgezogen.
   Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) Zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen sind immer teilerfremd.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat n^4 hat immer eine gerade Anzahl von Teilern.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Dann lässt sich jede gerade Zahl als ganzzahlige Linearkombination von a und b schreiben.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (d) $4 \mid (a^4 - a)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

   wahr ◯ unwahr ◯

(4 Punkte)

Klausur 1B SS 2010

1. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen mit größtem Primfaktor 3 und genau 12 Teilern.

   (4 Punkte)

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a = 2790$ und $b = 2244$.

   (4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $ggT(a, kgV(a,b)) = a$.

   (4 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche werden 2 Punkte abgezogen.
   Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) Es gibt zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler durch 4 teilbar ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Eine Kubikzahl n^3 hat immer eine gerade Anzahl von Teilern.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a,b) = 1$. Dann lässt sich jede ungerade Zahl $n \in \mathbb{N}$ als ganzzahlige Linearkombination von a und b schreiben.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (d) $4 \mid (a^3 - a)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (4 Punkte)

Klausur 1 SS 2013

1. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) ggT(7132307, 8229585) = 78377

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Für die natürliche Zahl $a = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$ (mit den Ziffern $a_0, a_1, \ldots, a_n$) gilt:
   6 teilt a genau dann, wenn 6 Teiler von $M = a_0 + 4a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n$ ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $7 \mid n$ gilt $\varphi(49n) = 42\,\varphi(n)$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (d) $9^{138234} + 5$ ist durch 80 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

(4 Punkte)

2. Ein Raum soll mit 24 Glühlampen mit zusammen 220 Watt beleuchtet werden. Es sstehen Glühlampen mit Leistung 60 Watt, 75 Watt und 100 Watt zur Verfügung. Berechnen Sie alle Möglichkeiten!

(4 Punkte)

3. Man bestimme die Ziffern x,y der Zahl A := 6.327.x28.040.4y8, wenn A Vielfaches von 44 ist.

(4 Punkte)

4. Im SS 2002 fand im grünen Hörsaal die Vorlesung: "Einfachste Elemente der Zahlentheorie" statt. Zum Abschluss gab es eine feierliche Parade um das Hörsaalgebäude, bei der alle Hörer der Vorlesung teilnahmen. Der damalige Dozent versuchte bei der Probe, die Hörer in 5-Reihen anzuordnen, allerdings blieben 2 übrig. Bei Anordnung in 6-Reihen blieben 4 übrig, während die Anordnung in 8-Reihen klappte. In den grünen Hörsaal passen höchstens 199 Hörer. Wie viele Hörer hatte die Vorlesung?

(4 Punkte)

2. Test SS 2015

1. Auf einer vergilbten Rechnung sind leider zwei Ziffern nicht mehr erkennbar. Es ist aber bekannt, dass 72 Konserven (mit gleichem Einzelpreis) zu einem Gesamtpreis von x67,9y Mark gekauft wurden. Bestimmen Sie die fehlenden Ziffern x und y.

   (4 Punkte)

2. Schreiben Sie 200 als Summe von zwei nichtnegativen ganzen Zahlen, wobei der erste Summand Vielfaches von 7 und der zweite Vielfaches von 9 ist. Geben Sie alle Möglichkeiten an.

   (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \mod 10 \\ 26x &\equiv 16 \mod 25 \\ 2x &\equiv 5 \mod 7 \end{aligned}$$

   (4 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) $29! + 1$ ist durch 30 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Es gibt $a \in \mathbb{Z}$, so dass die Endziffer von $a^2 - a + 7$ gleich 1 ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Die Kongruenz $3x \equiv 11 \mod 12$
   ist modulo 12 eindeutig lösbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (3 Punkte)

Klausur 1 SS 2016

1. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) Für die natürliche Zahl $a = (a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0)_{10}$ (mit den Ziffern $a_0, a_1, ..., a_n$) gilt:
   6 teilt a genau dann, wenn 6 Teiler von $M = a_0 + 4a_1 + 4a_2 + ... + 4a_n$ ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) $a = (34533)_7$ (in 7-adischer Zifferndarstellung) ist durch 6 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Es gibt $a \in \mathbb{Z}$, so dass die Endziffer von $a^2 - a + 7$ gleich 6 ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (3 Punkte)

2. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{N}$ mit 20 Teilern, die durch 18 teilbar sind und die Teilersumme 11616 haben.

   (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 7 && \mod 8 \\ 20x &\equiv -10 && \mod 21 \\ 3x &\equiv 39 && \mod 108 \end{aligned}$$

   (4 Punkte)

4. Bestimmen Sie alle Lösungen $(x|y) \in \mathbb{N}^2$ der Gleichung

$$11x + 59y = 7.$$

   (4 Punkte)

XXX

1. Zeigen Sie: $3173^{98} - 81^{37}$ ist durch 7 teilbar.

(4 Punkte)

2. Ein Automat soll Wechselgeld in Höhe von 510 Cent in 50 Cent- und 20 Cent-Münzen ausgeben. Welche Möglichkeiten gibt es?

(4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \mod 70 \\ 14x &\equiv -11 \mod 15 \\ 15x &\equiv 57 \mod 63 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

(a) Die Kongruenz $33x \equiv 7 \mod 100$ ist modulo 100 eindeutig lösbar.

wahr ◯ unwahr ◯

(b) $a = (1534623)_7$ (in 7-adischer Zifferndarstellung) ist durch 2 teilbar.

wahr ◯ unwahr ◯

(c) Die simultane Kongruenz $x \equiv 7 \mod 12$, $x \equiv 32 \mod 45$ ist lösbar.

wahr ◯ unwahr ◯

(3 Punkte)

XXX

1. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.
   (a) Die natürlichen Zahlen $a,b \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a,b) = 21$ und $kgV(a,b) = 1323$ haben jeweils genau 2 verschiedene Primfaktoren.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Ist $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $p \leq n$ eine Primzahl, dann gilt $p \mid (n!)$ und $p \nmid (n! + 4)$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $n^2 + 2n$ immer eine ungerade Anzahl von Teilern.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (d) $7^{32489 -}$ 1 ist durch 6 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (4 Punkte)

2. Sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\tau(n) := \Sigma_{d|n} 1$ die Teileranzahlfunktion, $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\sigma(n) := \Sigma_{d|n} d$ die Teilersummenfunktion. Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau(n) = 20$ und $\sigma(n) \leq 800$.
   Zeigen sie, dass es (außer den von Ihnen angegebenen) keine weiteren $n \in \mathbb{N}$ mit dieser Eigenschaft gibt.

   (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für Ziffern x,y der Zahl A := 6.5x7.228.040.4y8, wenn A Vielfaches von 88 ist.

   (4 Punkte)

4. Bestimmen Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 8 && \text{mod } 16 \\ 15x &\equiv -12 && \text{mod } 16 \\ 3x &\equiv 4 && \text{mod } 28 \end{aligned}$$

   (4 Punkte)

5. Bestimmen Sie den (kleinsten nichtnegativen) Rest bei Division von x durch 105:

$$x = 283828^{27653}$$

   (4 Punkte)

2. Querschnittsübung SS 2015

1. Sei $\sigma : N \to N$ mit $\sigma(n) := \Sigma_{d|n}\, d$ die Teilersummenfunktion.
   (a) Berechnen Sie $\sigma(14520)$.
   (b) Bestimmen Sie die natürlichen Zahlen n mit $\sigma(n) = 30$.
2. Beweisen Sie: Für alle $a,b,n \in N$ gilt $\operatorname{ggT}(n \cdot a, n \cdot b) = n \cdot \operatorname{ggT}(a,b)$.
3. Bestimmen Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen x mit $3|x$, $5|(x+2)$ und $7|(x+4)$.
4. Bestimmen Sie alle Lösungen folgender simultanen Kongruenz:

$$9x \equiv 6 \mod 105$$
$$60x \equiv 26 \mod 77$$

5. Zeigen Sie: Für alle $m \in Z$ gilt $m^{11} \equiv m \mod 66$.

Aussagen

1. $\tau(2646) = 18$

   wahr ◯ unwahr ◯

2. Es gibt keine natürliche Zahl n mit mindestens 3 verschiedenen Primteilern und $\tau(n) = 8$.

   wahr ◯ unwahr ◯

3. Die Kongruenz $33x \equiv 7 \mod 100$ ist eindeutig lösbar mod 100.

   wahr ◯ unwahr ◯

4. $a = (1534623)_7$ (in 7-adischer Zifferndarstellung) ist durch 2 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

5. 29! + 1 ist durch 30 teilbar.

   wahr ◯ unwahr ◯

6. Es gibt $a \in \mathbb{Z}$, so dass die Endziffer von $a^2 - a + 7$ gleich 1 ist.

   wahr ◯ unwahr ◯

7. Die Kongruenz $3x \equiv 11 \mod 12$ ist eindeutig lösbar mod 12.

   wahr ◯ unwahr ◯

8. Zwei beliebige natürliche Zahlen, deren Summe ungerade ist, sind immer teilerfremd.

   wahr ◯ unwahr ◯

9. $2^{123456} - 1$ ist eine Primzahl

   wahr ◯ unwahr ◯

10. Zwei beliebige ungerade natürliche Zahlen sind immer teilerfremd.

    wahr ◯ unwahr ◯

11. 12 ist eine vollkommene Zahl.

    wahr ◯ unwahr ◯

12. $3 \mid (a^4 - 1)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

    wahr ◯ unwahr ◯

13. Die Zahlen 0,1,2,3 sind paarweise teilerfremd.

    wahr ◯ unwahr ◯

14. Für $n \in \mathbb{N}$ hat n^3 immer eine ungerade Anzahl von natürlichen Teilern.

    wahr ◯ unwahr ◯

2. Querschnittsübung SS 2016

1. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 1 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) n ist genau dann prim, wenn $\varphi(n) = n - 1$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Sind f und g multiplikative zahlentheoretische Funktionen, dann auch $f + g$, $f \cdot g$ und $f \circ g$

   wahr ◯ unwahr ◯

2. Zeigen Sie: Für alle $x \in N$, $x > 1$, gilt $\Sigma_{p \le x,\, p\ \text{prim}}\, \sigma(p) - \Sigma_{p \le x,\, p\ \text{prim}}\, \varphi(p) = \Sigma_{p \le x,\, p\ \text{prim}}\, \tau(p)$

3. Zeigen Sie: Für alle $n \in N$ ist $\sigma(n^2)$ Teiler von $\Sigma_{d|n^2}\, d^2$.

4. Sei $\varphi : N \to N$ die Eulersche Φ-Funktion, σ die Teilersummenfunktion.

   (a) Berechenen Sie $\varphi(5400)$.

   (b) Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 4$.

   (c) Zeigen Sie: Für alle $n \in N$, $n > 1$, gilt $n^2 < 2\varphi(n)\,\sigma(n) < 2n^2$.

5. Bestimmen Sie die letzten 3 Dezimalstellen von 3^{406}.

6. Sie $\mu : N \to N$ die Möbius-Funktion, $n \in N$. Zeigen Sie: $\Sigma_{d^2|n}\, \mu(d) = |\mu(n)|$.

7. Bestimmen Sie $f(n) := \Sigma_{d|n}\, \mu^2(d)$ für alle $n \in N$.

XXX

1. Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen mit genau 3 verschiedenen Primteilern, größtem Primfaktor 5 und genau 18 Teilern.

   (4 Punkte)

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von $a = 3948$ und $b = 3462$.

   (4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\quad \mathrm{ggT}(a, \mathrm{kgV}(a,b)) = a$.

   (4 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 2 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) Zwei aufeinanderfolgende negative ganze Zahlen sind immer teilerfremd.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Für $n \in \mathbb{N}$ hat n^5 immer eine gerade Anzahl von natürlichen Teilern.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Seien $a,b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$. Dann lässt sich jedes ganzzahlige Vielfache von 7 als ganzzahlige Linearkombination von a und b schreiben.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (d) $4 \mid (a^3 - a)$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (4 Punkte)

2011

1. Auf einer vergilbten Rechnung sind leider zwei Ziffern nicht mehr erkennbar. Es ist aber bekannt, dass 72 Konserven (mit gleichem Einzelpreis) zu einem Gesamtpreis von 5x1,9y Mark gekauft wurden. Bestimmen Sie die fehlenden Ziffern x und y.

(4 Punkte)

2. Schreiben Sie 179 als Summe von zwei nichtnegativen ganzen Zahlen, wobei der erste Summand Vielfaches von 7, der zweite Vielfaches von 11 ist. Geben Sia alle Möglichkeiten an.

(4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\begin{aligned} 4x &\equiv 4 \mod 14 \\ 22x &\equiv 15 \mod 21 \\ 3x &\equiv 1 \mod 5 \end{aligned}$$

(5 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 2 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

(a) $36! + 1$ ist durch 37 teilbar.

wahr ◯ unwahr ◯

(b) Es gibt $a \in \mathbb{Z}$, so dass die Endziffer von $a^2 - a + 7$ gleich 0 ist.

wahr ◯ unwahr ◯

(c) Die Kongruenz $3x \equiv 2 \mod 12$ ist modulo 12 eindeutig lösbar.

wahr ◯ unwahr ◯

(3 Punkte)

Klausur SS 2010

1. Bestimmen Sie alle natürliche Zahlen n mit genau 4 verschiedenen Primfaktoren und genau 20 natürlichen Teilern.

(4 Punkte)

2. Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler d von $a = 1001$ und $b = 781$ und stellen Sie d als Linearkombination von a und b dar.

(4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Für alle $a, b, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\operatorname{ggT}(n \cdot a, n \cdot b) = n \cdot \operatorname{ggT}(a,b)$.

(5 Punkte)

4. Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr oder unwahr sind.
   Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche wird 2 Punkte abgezogen. Ist die Gesamtpunktzahl dieser Aufgabe negativ, wird sie mit 0 Punkten bewertet.

   (a) Für $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $k \nmid m$, $k \nmid n$ gilt immer $k \nmid (m+n)$.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (b) Sie $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Ist keine der ganzen Zahlen a mit $1 < a \leq \sqrt{n}$ Teiler von n, dann ist n eine Primzahl.

   wahr ◯ unwahr ◯

   (c) Seien $a, b, d \in \mathbb{N}$ und $d \mid a$, $d \mid b$ und $\operatorname{ggT}(a/d, b/d) = 1$. Dann ist $\operatorname{ggT}(a,b) = d$.

   wahr ◯ unwahr ◯

(3 Punkte)

Klausur 1A SS 2011

1. Bestimmen Sie alle natürliche Zahlen, die Vielfache von 12 sind und genau 14 Teiler haben.

   (4 Punkte)

2. Bestimmen Sie ganze Zahlen $x,y \in \mathbb{Z}$ mit: $226 = 2120897x + 2183273y$.

   (4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $3 \mid (2^n + (-1)^{n+1})$.

   (4 Punkte)

4. Seien $a,b,n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, und $p := ggT(a,b)$ prim. Zeigen Sie: $ggT(a^n, b^n) = p^n$.

   (4 Punkte)