Mitschrift zur Vorlesung

Analysis I

gehalten von
Dr. Markus Weimar
UNIVERSITÄT SIEGEN

Dieses Dokument ist ein Projekt der Fachschaft Mathematik an der Universität Siegen. Hierbei handelt es sich somit um kein offizielles Skript, sondern eine persönliche Mitschrift, an der noch gearbeitet wird.
Sollten Fehler auffallen, könnt Ihr euch an folgende E-Mail-Adresse (mailto:ella@fsr-math.de) wenden.

Analysis I

im Wintersemester 2016/2017 an der Universität Siegen

Inhaltsverzeichnis

Griechisches Alphabet

α	A	Alpha	ι	I	Iota	ρ (ϱ)	P	Rho
β	B	Beta	κ	K	Kappa	σ (ς)	Σ	Sigma
γ	Γ	Gamma	λ	Λ	Lambda	τ	T	Tau
δ	Δ	Delta	μ	M	My	υ	Υ	Ypsilon
ε (ϵ)	E	Epsilon	ν	N	Ny	φ (ϕ)	Φ	Phi
ζ	Z	Zeta	ξ	Ξ	Xi	χ	X	Chi
η	H	Eta	o	O	Omikron	ψ	Ψ	Psi
ϑ (θ)	Θ	Theta	π (ϖ)	Π	Pi	ω	Ω	Omega

Kapitel I

Grundlagen und Notation

1.1 Aussagenlogik

Definition 1.1.1. Seien A,B Aussagen.
Dann meint

- •) $\neg A$ — Nicht A / Das Gegenteil von A — *(Negation)*
- •) $A \wedge B$ — A und B — *(Konjugation)*
- •) $A \vee B$ — A oder B oder beide — *(Disjunktion)*
- •) $A \Rightarrow B$ — aus A folgt B (auch $B \Leftarrow A$) — *(Implikation)*
- •) $A \Leftrightarrow B$ — A gilt genau dann, wenn B gilt / aus A folgt B und umgekehrt — *(Äquivalenz)*

Bemerkung 1.1.2.

- •) *Aussagen sind logische Ausdrücke (entweder wahr oder falsch), z.b „Heute ist Montag“, „Alle Katzen sind grau“.*
- •) *Ausdrücke in Def. 1.1.1 sind selbst wieder Aussagen*
- •) *formale Definition über Wahrheitstafeln, z.B.*

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	fw

oder Rückriff auf Bekanntes, z.B.

$$A \Rightarrow B \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{„wird def. durch“}}}{:\Leftrightarrow} \quad (\neg A) \vee B$$

$$A \Leftrightarrow B :\Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- •) *Sprachreglung für „$A \Rightarrow B$“: A ist hinreichend für B*
  B ist notwendig für A

Beispiel 1.1.3.

(i) Für $A : x$ natürliche Zahl $\wedge\ x^2 - 3x + 2 = 0$
$B : x = 1\ \vee\ x = 2$

gilt $A \Leftrightarrow B$

Beweis. „$B \Rightarrow A$ “: Einsetzen!
„$A \Rightarrow B$ “: $0 = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) \Rightarrow x = 2 \vee x = 2$ □

(ii) Für Aussagen A, B gilt Kontraposition

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

z.B. A: „Es regnet“
B: „Es stehen Wolken am Himmel“

(Achtung: aus $A \Rightarrow B$ folgt i.A. <u>nicht</u> $B \Rightarrow A$ bzw. $\neg A \Rightarrow \neg B$!)

Beweis. Vergleiche Wahrheitstafeln □

(iii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$, z.B. A: „Logik ist elegant“

Beweis. Vergleiche Wahrheitstafeln □

(iv) aus $(A \Rightarrow B)$ und $B \Rightarrow C$ folgt $A \Rightarrow C$ *(Transitivität)*,
z.B.: A: „Es regnet“, B: „Wolken am Himmel“, C: „Es ist kühl“

Beweis. Vergleiche Wahrheitstafeln □

(v) Für $\vee$, $\wedge$ gelten Kommutativ-/Assoziativ-/Distributiv-Gesetz und DeMorgansche Regeln.

(vi) $A \wedge \neg A$ immer wahr *(Tautologie)*, genauso: $B \Rightarrow B$

Definition 1.1.4 (Quantoren)**.** Es meint

- •) $\forall x :$ „für alle x gilt“ (auch $\bigwedge_x$)
- •) $\exists x :$ „es existiert (mind.) ein x, sodass“ (auch $\bigvee_x$)
- •) $\exists! x :$ „es existiert genau ein x, sodass“
- •) $\nexists x :$ „es existiert kein x, sodass“

Beispiel 1.1.5. Im Kontext natürlicher Zahlen gilt

(i) $\forall x : x^2 \geq 0$

(ii) $\exists x : x^2 - 3x + 2 = 0$

(iii) $\exists! x : (x-1)^2 = 0$

(iv) $\nexists x : x^2 \leq 0$

Bemerkung 1.1.6. *Sei $A(x)$ eine von x abhängige Aussage.
Dann:*

(i) $\neg(\forall x : A(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg A(x)$, *z.B.* „$\exists y : \frac{x}{y} = 3$“

(ii) $\nexists x : A(x) \Leftrightarrow \neg(\exists x : A(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg A(x)$, *z.B.* „$x^2 < 0$“

Beweis-Prinzipien

für „$A \Leftrightarrow B$ “wobei A: bekannte (wahre) Aussage/Def./voraus.
B: neue/nicht-triviale Aussagen

- •) direkt: zeige $A \Rightarrow \ldots \Rightarrow B$ und verwende Bsp.
- •) indirekt: zeige $\neg B \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lightning$ (d.h. falsche Aussage)
(dann ist wegen „$f \Rightarrow bel.$“insb. $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr und damit nach Kontraposition auch $A \Rightarrow B$) Satz 1.1.8

Außerdem

- •) Ringschluss für Äquivalenzen $\boxed{\text{Bild}}$ Bsp.1.1.3
- •) Vgl. von Wahrheitstafeln (Logik) Bsp. 1.1.5
- •) für Existenz:
  - -) explizite Angabe/konstruktiv Bsp. 1.1.5(ii)
  - -) „probabilistische Methode “(hier nicht!)
- •) für Eindeutigkeit: Wähle zwei Objekte mit fraglicher Eigenschaft und zeige Gleichheit (später)
- •) vollständige Induktion (später)
- •) Falsifikation durch Gegenbeispiel, z.B. ist „Alle Studenten sind rothaarig“ falsch (Beweis: umschauen)
- •) Zerlegung in Teilbeweise Bsp.1.1.3(i), Satz 1.1.8

Anschließend 2 nicht-triviale Beispiele:

Lemma 1.1.7. *Sei n nat. Zahl. Dann gilt: n^2 gerade $\Rightarrow n$ gerade (d.h. $n = 2k$ mit k nat. Zahl)*

Beweis. (Nutze Kontraposition)
n ungerade $\Rightarrow n = 2k - 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 - 4k + 1 \Rightarrow n^2$ ungerade □

Satz 1.1.8. *$\sqrt{2}$ ist irrational.*

Beweis. (inderekt)
Annahme:

$$\exists \text{ ganze Zahlen} p, q : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$$\underset{\substack{\sqrt{2}>0,\\ \text{kürzen},\\ \text{quadrieren}}}{\Rightarrow} \exists \text{ teilerfremde natürliche Zahlen} a, b : 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = 2b^2, d.h. a^2 \text{gerade} \underset{\text{Lemma 1.1.7}}{\Rightarrow} a \text{ gerade, d.h.}$$

$$a = 2k \Rightarrow 2b^2 = (2k)^2 = 4k^2 \underset{|:2}{\Rightarrow} b^2 = 2k^2, \text{ d.h}$$

$$b^2 \text{ gerade} \underset{\text{Lemma 1.1.7}}{\Rightarrow} b \text{ gerade}$$

$$\lightning\ (a, b \text{ gerade aber teilerfremd}) \Rightarrow \text{Annahme falsch}$$

□

Bemerkung. Problem: brauchten Konzepte wie nat., ganze, (un-)gerade Zahlen (gibt es die Überhaupt? Lassen sich bekannte Rechenregeln formal beweisen?)
Später!

1.2 Naive Mengenlehre

Definition 1.2.1 (Gregor Cantor)**.** M heißt Menge $:\Leftrightarrow$ M ist Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens. Ggf. heißt x Element von M (schreibe $x \in M$).

Mengennotation:

1.) aufzählend, z.B. $M_1 := \{1, 2\}$ (hier z.B. $2 \in M$)

2.) via Eigenschaft/logischer Ausdruck $E(x)$
z.B. $M_2 = \{x | \underbrace{x \text{ nat. Zahl mit } x^2 < 7}_{\Leftrightarrow E(x)}\}$

Bemerkung 1.2.2.

(i) *Mengen gleich* $:\Leftrightarrow$ *alle Elemente gleich, z.B.* $M_1 = M_2$
(insbesondere ungeordnet, wiederholungsfrei)

(ii) *Mengen als Elemente sinnvoll, z.B.* $\{\underbrace{\{Mo, \ldots, Fr\}}_{=:A}, \underbrace{\{Sa, So\}}_{=:W}\} =: Z$
als Menge von Zeiträumen mit $A \in Z$ *(nicht* $Mo \in Z$*)!*

(iii) *„naiv“, da Def.1.2.1 problematisch, z.B. Russellsche Antinomie („Barbier-Paradoxon“):* *Für* $R := \{x | x \notin x\}$ *gilt* $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ ↯ *d.h.* R *darf keine Menge sein! (für „gutartige“Mengen geht alles gut!)* $\rightsquigarrow$ *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre*

(iv) *Man schreibt (selbsterklärend)*

$$M = \{x \in X | \ldots\}, \ \forall x \in X : \ldots \ , usw.$$

Definition 1.2.3. Seien A,B Mengen. Dann heißt die Menge

- •) $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$ *Vereinigung* von A und B
- •) $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$ *Schnitt* von A und B
- •) $A \setminus B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$ *Differenz*, A ohne B
- •) $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$ *kartesisches Produkt* von A und B

Weiter heißt A *Teilmenge* von B (bzw. B Obermenge von A, schreibe $A \subseteq B$ oder $B \supseteq A$) $:\Leftrightarrow \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$
Falls $A \subseteq B$ heißt $A^C := B \setminus A$ *Komplement* von A und B

Schließlich nennt man

- •) $\emptyset := \{\ \}$ *Leere Menge*
- •) $\mathcal{P} := \{X | X \subseteq A\}$ *Potenzmenge* von A
- •) $A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow:$ A und B *disjunkt*

Bemerkung 1.2.4.

- *•) Für* $A = \emptyset$ *und bel. Menge* B *ist* $A \subseteq B$*,*
  $\forall x \in A : \ldots$ *immer wahr,*
  $\exists x \in A : \ldots$ *immer falsch*

- *•) Venn-Diagramm:*

- *) allgemeiner:* $I \neq \emptyset$ *(Index-)Menge,* A_i *Menge* $\forall i \in I$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x | \exists i \in I : x \in A_i\}, \ \textit{z.B. } A_1 \cup A_2 \textit{ für } I = \{1,2\}$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x | \forall i \in I : x \in A_i\}, \ \textit{z.B. } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \textit{ für } I = \{1,2,3\}$$

- *)* (a,b) *<u>geordnetes</u> Paar mit* $(a,b) = (c,d) :\Leftrightarrow a = c \wedge b = d$
  (i.A also $(a,b) \neq (b,c)$ *und damit* $A \times B \neq B \times A$ *)*

- *)* $A \subset B$ *(echte Teilmenge)* $:\Leftrightarrow \ A \subseteq B \wedge A \neq B$

Proposition 1.2.5. *Für Mengen A, B gilt*

(i) $A = B \Leftrightarrow A \subseteq \wedge B \subseteq A$

(ii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Weiter gelten Kommutativ-/Assoziativ-/Distributivitätgesetze für $\cup$ *und* $\cap$

Beweis.

(i) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \overset{Def. „\subseteq“}{\Leftrightarrow} \quad \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B)$
$\wedge \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \forall x : [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Leftarrow x \in B)]$

$\underset{Def. „\Leftrightarrow“}{\Leftrightarrow} \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
$\underset{Def. „=“}{\Leftrightarrow} A = B$

(ii) Nutze Definition 1.2.3
Rest: Nutze Beispiel 1.1.3

□

Beispiel 1.2.6.

(i) Für (Achtung informell!):

$\mathbb{N}$	$:= \{1,2,3,\ldots\}$	*natürliche Zahlen*
$\mathbb{N}_0$	$:= \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$	natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{Z}$	$:= \mathbb{N}_0 \cup \{-x \| x \in \mathbb{N}\} = \{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$	*ganze Zahlen*
$\mathbb{Q}$	$:= \{x \| \exists p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} : x = \frac{p}{q}\}$	*rationale Zahlen*
$\mathbb{R}$	$:= \{\pm x \| \exists k \in \mathbb{N}\ \forall i \in \mathbb{N}\ \exists n \in \{0,1,\ldots,9\} : x = n_1 n_2 \ldots, n_{n+k} n_{k+2} \ldots\}$ (Darstellung als unendlicher Dezimalbruch)	*reelle Zahlen*
$\overline{\mathbb{R}}$	$:= \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$	erweiterte reelle Zahlen

gilt

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ (teste damit Prop. 1.2.5 (i)(ii)!)

(ii) $M := \{a,b,c\} \Rightarrow \mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
und $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$, $\{b\} \cup \{a\} = \{a,b\}$, $M \backslash \{a\} = \{b,c\}$

(iii) $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) | n,m \in \mathbb{N}\} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2)\ldots\}$

1.3 Relationen

Definition 1.3.1.

(i) Seien A, B Mengen, $a \in A$, $b \in B$.

- •) R heißt *Relation* auf $A \times B$ mit Graph G_R
  $:\Leftrightarrow G_R \subseteq A \times B$
- •) a steht in Relation R zu b (schreibe aRb)
  $:\Leftrightarrow (a, b) \in G_R$

(ii) Für $A = B$ heißt die Relation R

(1.) reflexiv	$:\Leftrightarrow xRx$	$\forall x \in A$
(2.) transitiv	$:\Leftrightarrow xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	$\forall x, y, z \in A$
(3.) symmetrisch	$:\Leftrightarrow xRy \Rightarrow yRx$	$\forall x, y \in A$
(4.) antisymmetrisch	$:\Leftrightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	$\forall x, y \in A$
(5.) total	$:\Leftrightarrow xRy \vee yRx$	$\forall x, y \in A$

- •) Quasi-Ordnung $:\Leftrightarrow$ (1.) $\wedge$ (2.) gilt
- •) Halbordnung $:\Leftrightarrow$ (1.) $\wedge$ (2.) $\wedge$ (4.) gilt
- •) totale Ordnung $:\Leftrightarrow$ (1.) $\wedge$ (2.) $\wedge$ (4.) $\wedge$(5.) gilt
- •) Äquivalenzrelation $:\Leftrightarrow$ (1.) $\wedge$ (2.) $\wedge$ (3.) gilt

Beispiel 1.3.2.

(i) $\boxed{\text{Bild}}$

Max studiert Mathe
$a \in A$ (R) $b \in B$

$\rightarrow$ Relation „studiert“auf $A \times B$

(ii) Äquivalenzrelation „=“ auf $M \times M$ mit $M = \{a, b, c\}$

totale Ordnung „$\leq$“ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, z.B. $(1, 2) \in G_{\leq}$, $(7, -3) \notin G_{\leq}$

Halbordnung „$\subseteq$“ auf $\mathcal{P}$, z.B.$(\{b\}, \{b, c\}) \in B_{\subseteq}$

Quasi-Ordnung „teilt“ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Relation „$<$ “ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nicht reflexiv

Bemerkung 1.3.3. $\exists$ *weitere Eigenschaften (z.B. „Linkstotal“: $\forall a \exists b : aRb$) und Zusammenhänge (z.B. total $\Rightarrow$ reflexiv, Bew: $y := x$)*

1.4 Abbildungen

Hauptstudienobjekt der Analysis

Definition 1.4.1. Seien X, Y Mengen

(i) φ heißt *Abbildung* zwischen X und Y/ *Funktion* von X nach Y
(schreibe $\varphi : X \to Y, x \mapsto y := \varphi(x)$)

(ii) Für $x \in X$, $y \in Y$ mit $y := \varphi(x)$ heißt

- •) y *Bild* von x unter φ/ Wert von φ in x
- •) x *Urbild* von y unter φ

(iii) Für $A \subseteq X$ heißt $\varphi(A) := \{y \in Y | \exists x \in A : y = \varphi(x)\}$
Bild von A unter φ

(iv) $W_\varphi := \varphi(X) \subseteq Y$ heißt *Wertebereich* von φ

(v) Für $B \subseteq Y$ heißt $\varphi^{-1}(B) := \{x \in X | \exists y \in B : y = \varphi(x)\}$
Urbild von B unter φ

(vi) $D_\varphi := \varphi^{-1} = Y$ heißt *Definitionsbereich* von φ

(vii) $G_\varphi := \{(x, \varphi(x)) |\, x \in X\} \subseteq X \times Y$ heißt *Graph* von φ

(viii) Für $A \subset X$ heißt die Abbildung $\varphi|_A : A \to Y$ mit $\varphi|_A(x) := \varphi(x \ \forall x \in A$
Einschränkung von φ auf A

Definition 1.4.2. Seien $\varphi : X \to Y$, $\psi : A \to B$ Abbildungen

(i) $\varphi = \psi :\Leftrightarrow X = A \wedge Y = B \wedge \forall x \in X : \varphi(x) = \psi(x)$

(ii) Für $W_\psi \subseteq X$ ist die Verknüpfung $\varphi \circ \psi : A \to Y$ definiert durch $(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x))$

Beispiel 1.4.3.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \Rightarrow W_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\},\ f(\{1, 2, 3\}) = \{1, 4, 9\}$
Für $\varphi : \mathbb{N}_0 \to,\ \varphi(x) := x^2$ ist $\varphi \neq f$ aber $\varphi = f|_{\mathbb{N}_0}$

(ii) $id_X : X \to X,\ x \mapsto id_X(x) := x$ heißt *Identität* auf X

(iii) Bsp. 1.3.2 (i) definiert <u>keine</u> Funktion (2 Gründe!)

(iv) X: Zeitpunkt, Y: Messwerte, $\varphi(x)$: Temperatur T zur Zeit x

(v) $\boxed{\text{Bild}}$
z.B. $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 = W_\psi$, $\psi(x) = x - 1$ und φ aus (i)
$\Rightarrow \varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ (\varphi \circ \psi)(x) = (x - 1)^2$

Satz 1.4.4. *Für Abbildungen $f : W \to X,\ g : X \to Y,\ h : Y \to Z$ ist deren Komposition wohldefiniert und assoziativ, d.h.*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \ \textit{als Abb. } W \to Z$$

Beweis. klar nach Definition 1.4.2(ii) $\square$

Definition 1.4.5. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt

(i) *injektiv* $:\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : (\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

(ii) *surjektiv* $:\Leftrightarrow W_\varphi = Y$

(iii) *bijektiv* $:\Leftrightarrow$ (i) $\wedge$ (ii) gilt

Beispiel 1.4.6.

(i) f aus Bsp. 1.4.3 ist weder injektiv noch surjektiv

(ii) φ aus Bsp. 1.4.3 ist injektiv, nicht surjektiv

(iii) id_X und ψ aus Bsp. 1.4.3 sind bijektiv

(iv) $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow, (a, b) \mapsto a + b$ ist surjektiv, nicht injektiv

Satz 1.4.7. *Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist*

(i) injektiv $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : (x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2))$

(ii) bijektiv $\Leftrightarrow \exists \psi : Y \to X : \psi \circ \varphi = id_X \wedge \varphi \circ \psi = id_X$
Ggf. ist ψ eindeutig bestimmt

Beweis. (i) klar nach Def. 1.4.4 nach Bsp 1.1.3(ii) (Kontraposition)

(ii) „$\Rightarrow$“: φ bijektiv $\Rightarrow \varphi$ surj. $\wedge$ inj.
$\Rightarrow \forall y \in Y\, \exists x \in X : y = \varphi(x) \wedge x$ eindeutig, d.h $x = x_y$
$\Rightarrow \psi : Y \to X,\, y \mapsto \psi(y) := x_y$ erfüllt gewünschtes.

„$\Leftarrow$“: zeigen: φ surjektiv $\wedge$ injektiv

- Annahme: φ nicht surjektiv $\Rightarrow W_\varphi \subset Y$

  $\Rightarrow \exists\, \tilde{y} \in Y : \forall x \in X : \varphi(x) \neq \tilde{y}$ aber $\tilde{y} = id_y(\tilde{y}) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi\circ\psi = id_Y}}{=} \varphi(\underbrace{\psi(\tilde{y})}_{\in X})$ ↯ $\Rightarrow \varphi$ surj.

- Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ $(*)$
  $\Rightarrow x_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi\circ\psi = id_X}}{=} \psi(\varphi(x_1)) \underset{(*)}{=} \psi(\varphi(x_2)) = x_2 \Rightarrow \varphi$ inj.

Eindeutigkeit: Sei auch $\tau : Y \to X$ mit $\tau \circ \varphi = id_X \wedge \varphi \circ \tau = id_Y$
$\Rightarrow \psi = \psi \circ id_Y = \psi \circ (\varphi \circ \tau) \underset{\text{Satz 1.4.4}}{=} (\psi \circ \varphi) = id_X \circ \tau = \tau$ □

Definition 1.4.8. Ist φ bijektiv, so heißt $\varphi^{-1} := \psi$ aus Satz 1.4.7 *Inverse/Umkehrfunktion* von φ

Proposition 1.4.9. *Für bijektive Abbildungen in $\varphi : X \to Y, \psi : Y \to Z$ ist*

(i) $\varphi^{-1} : Y \to X$ bijektiv mit $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

(ii) $\psi \circ \varphi : X \to Z$ bijektiv mit $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} : Z \to X$

Beweis. Übung (Satz 1.4.7(ii) nutzen!) □

Bemerkung 1.4.10.

(i) anschaulich:
Bild

(ii) geeignete

- •) *Wahl von Y erzwingt Surjektivität*
- •) *Einschränkung auf $A \subseteq X$ erzwingt Injektivität*

(iii) $\varphi : X \to X$ *bijektiv heißt* Permutation *von X*
z.B.

$$\begin{aligned} X = \{1,2,3\} : \varphi_1 = \quad & id_X \\ \varphi_2 : \ 1 & \mapsto 1 \\ 2 & \mapsto 3 \\ 3 & \mapsto 2 \end{aligned}$$

1.5 (Über-) Abzählbarkeit

Definition 1.5.1.

(i) Mengen A, B heißen *gleichmächtig* (schreibe $A \sim B$)
$:\Leftrightarrow \exists \varphi : A \to B$ bijektiv

(ii) Menge M heißt

(1.) *endlich* $:\Leftrightarrow M = \emptyset \vee \exists n \in \mathbb{N} : \{1, 2, \dots n\} \sim M$

(2.) *abzählbar unendlich* $:\Leftrightarrow \mathbb{N} \sim M$

(3.) *abzählbar* $:\Leftrightarrow$ (1.) $\vee$ (2.)

(4.) *überabzählbar* $:\Leftrightarrow \neg$ (3.)

(iii) Für M abzählbar heißt

$$card(M) := \begin{cases} 0, & \text{falls } M = \emptyset \\ n, & \text{falls } M \sim \{1, \dots, 3\} \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ \aleph_0, & \text{falls } M \sim \mathbb{N} \end{cases}$$

(auch $|M|$ oder $\#M$) *Kardinalität* von M

Bemerkung 1.5.2. $\sim$ *ist Äquivalenz-Relation auf Klasse aller Mengen. Insbesondere ist n aus (1.) eindeutig bestimmt*

Beweis. Übung, Proposition 1.4.9 □

Lemma 1.5.3. *Für $M \neq \emptyset$ gilt:*

(i) M *abzählbar* $\Leftrightarrow \exists A_M \subseteq \mathbb{N} : A_M \sim M$

(ii) M *abzählbar* $\wedge L \subseteq M \Rightarrow L$ *abzählbar*

Beweis. (i) „$\underset{\sim\sim}{\Rightarrow}$“: trivial, „$\underset{\sim\sim}{\Leftarrow}$“: vllt. später

(ii) OBdA $\emptyset \neq L \neq M$

Setze $\triangle = M \setminus L \;\Rightarrow \emptyset \neq \triangle \subset M,\; M \setminus \triangle = L.$

Mit $A_M \subseteq \mathbb{N}$, Bijektion $\varphi_M : A_M \to M$ aus (i),

definiere $A_L := A_M \setminus \varphi_M^{-1}(\triangle) \subset D_{\varphi_M} \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow \varphi_L := \varphi_M|_{A_L} : A_L \to M \setminus \triangle L$ bijektiv, d.h. $A_L \sim L$

$\underset{(i)}{\Rightarrow}$ L abzählbar.

□

Proposition 1.5.4. $\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}$

Beweis. Wählen $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bijektiv gemäß „Cantorischem Diagonalverfahren“:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}\setminus\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\
1 & (1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[r] & (1,4) \arrow[dl] & \cdots \\
2 & (2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[ur] & (2,3) \arrow[dl] & & \\
3 & (3,1) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[dl] & & & \\
4 & (4,1) \arrow[d] & & & & \\
\cdots & \cdots & & & &
\end{tikzcd}$$

d.h. $\varphi(1) := (1,1)$
$\varphi(2) := (1,2)$

$\square$

Satz 1.5.5. *$I \neq \emptyset$, abzählbar, M_i abzählbar $\forall i \in I$*

$\Rightarrow V := \bigcup\limits_{i\in I} M_i$ abzählbar.

Beweis. OBdA $V \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \exists x_0 \in V$

I abz. $\underset{Lemma 1.5.3(i)}{\Rightarrow} \exists J \subseteq \mathbb{N},\ \varphi : J \to I$ bijektiv

$\forall j \in J$ ist $M_{\varphi(j)}$ abz., d.h. $\exists A_j \subseteq \mathbb{N},\ \varphi_j : A_j \to M_{\varphi(j)}$ bijektiv.

Setze $\psi : \mathbb{N}^2 \to V$,

$$\psi(j,k) := \begin{cases} \varphi_j(k), & \text{falls } j \in J, k \in A_j (k\text{-tes Element der } j\text{-ten Menge}) \\ x_0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \psi$ surjektiv

$\underset{Bem 1.4.10(ii)}{\Rightarrow} \exists L \subseteq \mathbb{N}^2 : \psi\Big|_L : L \to$ bijektiv, d.h. $L \sim V$.

Prop. 1.5.4 $\Rightarrow$ $\mathbb{N}^2$ abz. $\underset{Lemma 1.5.3(ii)}{\Rightarrow}$ L abz. $\underset{Bem 1.5.2}{\Rightarrow}$ $\square$

Satz 1.5.6. *$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und alle endlichen karthesischen Produkte aus ihnen sind abzählbar unendliche Mengen und damit insbesondere gleichmächtig.*

Beweis.

-) Sei $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$

  $\Rightarrow$ 1.) M abz.
  ($M = N$: wegen $\varphi = id_{\mathbb{N}}$ in Def 1.5.1)
  Rest: als abz. Vereinigung nach Def. 1.5.1
  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n | n \in \mathbb{N}\},\ \mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\left\{\frac{p}{n} | p \in \mathbb{Z}\right\}}_{\sim\mathbb{Z}}$

2.) $\forall n \in \mathbb{N} : \{1, 2, \ldots, n+1\} \subseteq M$
$\Rightarrow M$ nicht endlich
$\Rightarrow M$ abzählbar unendlich

- •) Für endl. Produkt $M_1 \times \ldots \times M_k$ nutze Cantor-Diagonlverfahren(Bew. Prop.1.5.4).

$\square$

Satz 1.5.7. *Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen liegen überabzählbar viele weiter.*

Beweis. gzz.: $M := \{0, n_1 n_2 n_3 \ldots | n_j \in \{0, 1\}\}$ überabzählbar.
Inderekt mittels Cantors zweitem Diagonalargoment:
Annahme: M abzählbar $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$ mit

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \boxed{a_{11}} a_{12} a_{13} a_{14} \ldots \\ a_2 &= 0, a_{21} \boxed{a_{22}} a_{23} \ldots \qquad\qquad \text{wobei } a_{ij} \in \{0,1\} \\ a_3 &= 0, a_{31} a_{22} \boxed{a_{23}} \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

Setze $b := 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ mit $b_j := \begin{cases} 0, & \text{falls } a_{jj} = 1 \\ 1, & \text{falls } a_{jj} = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow b \in M$, aber $b \neq a_j \; \forall j \in \mathbb{N}$ ↯ M nicht abzählbar. $\square$

Folgerung 1.5.8. $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *sind überabzählbar*

Beweis.

- •) $\mathbb{R}$ abzählbar, $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R} \underset{Lem.1.5.3(ii)}{\Rightarrow} (0,1)$ abzählbar ↯
- •) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ abzählbar $\underset{\substack{Satz 1.5.5, \\ Satz 1.5.6}}{\Rightarrow} \mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ abzählbar ↯

$\square$

Beispiel 1.5.9.

- •) Wie in Satz 1.5.7 zeigt man: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar
- •) $(0,1) \sim \mathbb{R}$ wegen $\varphi(x) := \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$
- •) $\mathbb{N} \sim \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ wegen $\varphi(n) := 2n$

1.6 Körper

Definition 1.6.1. Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit den Abbildungen

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (x,y) \mapsto x+y \qquad \text{(Addition)}$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (x,y) \mapsto x \cdot y \qquad \text{(Multiplikation)}$$

heißt *Körper* $:\Leftrightarrow$

(A1) $\forall x,y,z \in \mathbb{K} : x + (y+z) = (x+y)+z$ (+ ist assoziativ)

(A2) $\forall x,y \in \mathbb{K} : x+y = y+x$ (+ ist kommutativ)

(A3) $\exists 0 \in \mathbb{K} \forall x \in \mathbb{K} : x+0 = x$ ($\exists$ Null)

(A4) $\forall x \in \mathbb{K} \exists (-x) \in \mathbb{K} : x + (-x) = 0$ ($\exists$ additive Inverse)

(M1) $\forall x,y,z \in \mathbb{K} : x(yz) = (xy)z$ ($\cdot$ ist assoziativ)

(M2) $\forall x,y \in \mathbb{K} : xy = yx$ ($\cdot$ ist kommutativ)

(M3) $\exists 1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \forall x \in \mathbb{K} : x \cdot 1 = x$ ($\exists$ Eins)

(M4) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \exists \left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{K} : x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ($\exists$ multiplikative Inverse)

(D) $\forall x,y,z \in \mathbb{K} : x(x+y) = xy + xz$ (Distributiv-Gesetz)

Beispiel 1.6.2.

(i) $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ mit üblicher Addition und Multiplikation sind Körper, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}\}$ aber nicht!

(ii) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 := \{0,1\}$ mit $\begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ und $\begin{array}{c|cc} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

Bemerkung 1.6.3. *Notation $-x$, $\frac{1}{x}$ zunächst nur symbolisch.*
(beachte: in $\mathbb{F}$) ist $1 \oplus 1 = 0$ und damit $\ominus 1 = 1$

Eigenschaften und Auswahl an Rechenregeln:

Satz 1.6.4. *Sei $\mathbb{K}$ mit $+$, $\cdot$ Körper. Dann*

(i) Äquivalenz-Umformungen:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{K} : x = y \Leftrightarrow x+y = y+z$$
$$\forall x,y \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x = y \Leftrightarrow xy = yz$$

(ii) 0 und 1 sind eindeutig bestimmt

(iii) Additive und multiplikative Inverse sind jeweils eindeutig bestimmt

(iv)

$$\forall x \in \mathbb{K} : -(-x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

(v) Nullteilerfreiheit: $\forall x,y \in \mathbb{K} : xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

Beweis. (Exemplarisch, Rest Übung)

(i) für $+$: Seien $x, y, z \in \mathbb{K}$
„$\Rightarrow$“: $x + y \underset{\substack{\uparrow \\ x=y}}{=} y + z$

„$\Leftarrow$“: $x \underset{(A3)}{=} x + y \underset{(A4)}{=} x + (z + (-z)) \underset{(A1)}{=} (x + z) + (-z)$
$\underset{x+y=y+z}{=} (y + z) + (-z) \underset{(A1)}{=} y + (z + (-z)) \underset{(A4)}{=} y + 0 \underset{(A3)}{=} y$

(ii) für $\cdot$: $(M3)$ gelte für $1, 1' \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \; 1' \underset{\substack{(M3) \\ \text{für } 1}}{=} 1' \cdot 1 \underset{M2}{=} 1 \cdot 1' \underset{\substack{(M3) \\ \text{für } 1'}}{=} 1$

(iv) für $+$: Sei $x \in \mathbb{K} \underset{(A4)}{\Rightarrow} \exists(-x) \in \mathbb{K} \underset{(A4)}{\Rightarrow} \exists(-(-x)) \in \mathbb{K}$ und
$(-(x)) + (-x) \underset{(A2)}{=} (-x) + (-(-x)) \underset{\substack{(A4) \\ \text{für } (-x)}}{=} 0 \underset{\substack{(A4) \\ \text{für } x}}{=} x + (-x)$
$\underset{(i)}{\Rightarrow} -(-x) = x$

(v) Seien $x, y \in \mathbb{K}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $x = 0$ ($y = 0$ analog)
$0y + 0y \underset{D}{=} (0 + 0)y \underset{(A3)}{=} 0y \underset{(A3)}{=} 0y + 0 \underset{(A2)}{=} 0 + 0y \underset{(i)}{\Rightarrow} 0y = 0 \quad (*)$

„$\Rightarrow$“: Sei $xy = 0$.
Fall $x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \vee y = 0$
Fall $x \neq 0 \;\Rightarrow\; y \underset{(M3)}{=} y \cdot 1 \underset{M4}{=} y\left(x\,\frac{1}{x}\right) \underset{(M2)}{=} (yx)\frac{1}{x}$
$\underset{(M2)}{=} (xy)\frac{1}{x} \underset{xy=0}{=} 0 \cdot \frac{1}{x} \underset{(*)}{=} 0$

$\square$

Bemerkung 1.6.5. *Wegen Satz 1.6.4 sind*

$$-: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad (x, y) \mapsto x - y := x + (-y)$$
$$\div : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K}, \qquad (x, y) \mapsto \frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}$$

in jedem Körper $\mathbb{K}$ *(mit $+$, $-$) wohldefiniert und erfüllt die üblichen Rechenregeln (z.B.* $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$*)*

Definition 1.6.6. Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ ein Körper und $\leq$ eine totale Ordnung auf $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Dann heißt $\mathbb{K}$ durch $\leq$ *angeordnet* $:\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{K}$

O1 $x < y \Rightarrow x + z < y + z$

O2 $x < y \vee 0 < z \Rightarrow xz < yz$

wobei $a < b. \Leftrightarrow (a \leq b) \vee (a \neq b)$ für $a, b \in \mathbb{K}$

Satz 1.6.7. *Ist* $\mathbb{K}$ *durch* $\leq$ *angeordnet, so gilt*

(i) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ *genau eine der Bezeichnungen*

$$x < y, \qquad x = y, \qquad x > y \qquad \textit{(Trichotomie)}$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow 0 > -x$

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} : x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,

$$\forall x, y \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x < y \Leftrightarrow \begin{cases} xz < yz, & \textit{falls } z > 0 \\ xz > yz, & \textit{falls } z < 0 \end{cases}$$

(iv) $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : x^2 > 0$. *Insbesondere ist* $1 > 0$
(Äquivalenz-Umformung)

Beweis. einfach ↑ Übung
((i): Definition!, (ii): 1. „⇔“ indirekt, (iii): Fall $z > 0$ genügt, für $\cdot$ $xy < yz \;\Leftrightarrow\; 0 < z(y-x)$ nutzen, (iv): (iii) nutzen) □

Beispiel 1.6.8.

(i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

(ii) $\mathbb{F}$ ↯ (denn $0 < 1 = 1 \oplus 0 < 1 \oplus 1 = 0$ d.h. $0 < 0 \Rightarrow 0 \leq 0 \vee 0 \neq= 0$ ↯)

Bemerkung 1.6.9.

(i) Sehen in Bsp.1.6.8(ii): Jeder angeordneter Körper enthält (Modell von) $\mathbb{N}$ *und damit auch (*$\mathbb{N}_0$,$\mathbb{Z}$ *und)* $\mathbb{Q}$ *als Teilmenge*

(ii) Wegen Satz 1.6.4(i) gilt Satz1.6.7(iii) auch für „$\leq$*“*

Definition 1.6.10. Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ Körper. Ist $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$ mit $0, 1 \in \mathbb{L}$ bzgl. der auf $\mathbb{L}$ eingeschränkten Abbildungen $+, \cdot$ selbst ein Körper, so heißt $\mathbb{L}$ *Teilkörper* von $\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}$ *Oberkörper* von $\mathbb{L}$.

Beispiel 1.6.11.

(i) $\mathbb{Q}$ Teilkörper von $\mathbb{R}$ (nach Bem. 1.6.9 „kleinster“)

(ii) $\mathbb{F}_2$ <u>kein</u> Teilkörper von $\mathbb{Q}$, da anderes $\oplus, \odot$

(iii) $\mathbb{Z}$ <u>kein</u> Teilkörper von $\mathbb{R}$, da kein Körper

1.7 Beschränktheit und Vollständigkeit

Definition 1.7.1. Sei $\mathbb{K}$ ein durch $\leq$ angeordneter Körper, $M \subseteq \mathbb{K}$ und $s \in \mathbb{K}$. Dann heißt

(i) M nach *oben beschränkt* $:\Leftrightarrow$ Für Mengen aller oberen Schranken von M in $\mathbb{K}$,

$$\mathcal{O}(M) := \{s \in \mathbb{K} | \forall x \in M : x \leq s\}$$

gilt $\mathcal{O} \neq \emptyset$

(ii) s *Supremum* von M in $\mathbb{K}$ ($s = \sup M$)

$:\Leftrightarrow s \in \mathcal{O}(M) \wedge \forall t \in \mathcal{O}(M) : s \leq t$

(iii) s Maximum von M ($s = \max M$) $:\leftrightarrow s = \sup M \wedge s \in M$

Bemerkung 1.7.2. $\sup M$ *(„kleinste obere Schranke") ist eindeutig bestimmt, falls es existiert.*

Beweis. $s, s' \in \mathbb{K}$ seien Suprema von $M \Rightarrow s, s' \in \mathcal{O}(M) \wedge \quad s \underset{\substack{\uparrow \\ s=\sup M}}{\leq} s' \underset{\substack{\uparrow \\ s'=\sup M}}{\leq} s$ □

Beispiel 1.7.3. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$ mit üblicher Ordnung

(i) $M_1 := \{x \in \mathbb{K} | x > 0\}$ <u>nicht</u> nach oben beschränkt, $\nexists \sup, \max$

(ii) $M_2 := \{x \in \mathbb{K} | x < 1\}$ ist nach oben beschränkt, $s = \sup M_2 = 1, \nexists \max M_2$

(iii) $M_3 := \{x \in \mathbb{K} | x \leq 1\}$ ist nicht nach oben beschränkt, $s = \sup M_3 = \max M_3 = 1$

Satz 1.7.4. *Sei $\mathbb{K}$ angeordneter Körper, $M \subseteq \mathbb{K}$, $s \in \mathbb{K}$. Dann*

$$\begin{aligned} s = \sup M \Leftrightarrow &(1.) s \geq x \, \forall x \in M \\ &(2.) \forall \varepsilon \in \mathbb{K} \textit{ mit } \varepsilon > 0 \, \exists x_\varepsilon \in M : x_\varepsilon > s - \varepsilon \end{aligned}$$

Beweis. Wegen (1) $\Leftrightarrow s \in \mathcal{O}$ <u>gzz.</u>: (2) $\Leftrightarrow \forall t \in \mathcal{O}(M) : s \leq t$

„$\Rightarrow$": <u>Annahme</u>: $\exists t \in \mathcal{O}(M) : \ s > t$
$\Rightarrow \ \varepsilon := s - t \in \mathbb{K}, \ \varepsilon > 0$
$\underset{(2)}{\Rightarrow} \ \exists x_\varepsilon \in M : \ x_\varepsilon > s - \varepsilon = t$ ↯ zu $t \in \mathcal{O}(m)$

„$\Leftarrow$": <u>Annahme</u>: $\exists \varepsilon \in \mathbb{K}$ mit $\varepsilon > 0$, sodass $\forall x \in M : \ x \leq s - \varepsilon$
$\Rightarrow \ t := s - \varepsilon \in \mathcal{O}(m)$ und $t < s$ ↯ zu $s \leq t$

□

Bemerkung 1.7.5.

(i) Analog zu Def. 1.7.1 definiert man für Teilmengen angeordneter Körper Infimum (Minimum) als größte unter Schranke (in M).
Satz **??** *gilt entsprechend.*

(ii) $M \subseteq \mathbb{K}$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$ M nach oben und unten beschränkt

Proposition 1.7.6. *Sei $\mathbb{K}$ angeordneter Körper und $A, B \subseteq \mathbb{K}$. Dann gilt (sofern die Infima/Suprema jeweils existieren)*

(i) $\inf A \leq \sup A$

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$ *und* $\sup A \leq \sup B$

(iii) $\inf(A \cup B) = \inf\{\inf A, \inf B\}$ *und*
$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$

(iv) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \quad \inf(A \cap B) \geq \sup\{infA, \inf B\}$
und $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup A, \sup B\}$

Bemerkung 1.7.7. *Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?*

$M := \{x \in \mathbb{K} | 0 < x \wedge x^2 < 2\}$ *ist beschränkt, aber nur für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ existiert $supm \in \mathbb{K}$*

Definition 1.7.8. Sei $\mathbb{K}$ ein durch $\leq$ angeordneter Körper.
$\mathbb{K}$ heißt vollständig $:\Leftrightarrow \forall M \subseteq \mathbb{K}$ mit $M \neq \emptyset$ und M nach oben beschränkt $\exists \sup M \in \mathbb{K}$

Beispiel 1.7.9. $\mathbb{R}$ vollständig, $\mathbb{Q}$ nicht.

Satz 1.7.10. *Sei $\mathbb{K}$ ein durch $\leq$ angeordneter Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1.) *$\mathbb{K}$ ist vollständig*

(2.) *$\forall \subseteq \mathbb{K}$ mit $L \neq \emptyset$ und L nach unten beschränkt $\exists \inf M$*

(3.) *Sind $A, B \subseteq \mathbb{K}$, sodass $A, B \neq \emptyset$ und $\forall (a,b) \in A \times B$ $a \leq b$*

Beweis. Ringschluss

(1) $\Rightarrow$ (2): Zu $L \subseteq \mathbb{K}$ betrachte $M_L := \{-x \in \mathbb{K} \,|\, x \in L\}$
$\Rightarrow x \in L : (x \geq t \;\Leftrightarrow\; -x \leq -t) \qquad (*)$
$M_L \neq \emptyset$, nach oben beschränkt (da L nach unten beschränkt)
$\underset{(1)}{\Rightarrow} \exists s = \sup M_L \in \mathbb{K} \underset{(*),\, t:=-s}{\Rightarrow} -s = \inf L$

(2) $\Rightarrow$ (3): Nach Voraussetzung ist B nach unten (durch jedes $a \in A$) beschränkt. $\underset{(2)}{\Rightarrow}$
$\exists c := \inf B \in \mathbb{K}$
$\Rightarrow \forall (a,b) \in A \times B \qquad a \underset{\text{größte untere Schranke}}{\leq} c \underset{\text{unter Schranke}}{\leq} b$

(3) $\Rightarrow$ (1) : Sei $M \subseteq \mathbb{K}$ mit $M \neq \emptyset$ und M nach oben beschränkt.
Setze $A := M$, $B := \{b \in \mathbb{K} \,|\, \forall a \in A : a \leq b\}$
$\Rightarrow B = \mathcal{O}(A)$, A, $B \neq \emptyset$, $\forall (a,b) \in A \times B :\ a \leq b$
$\underset{(3)}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{K} :\ \forall (a,b) \in A \times B :\ a \leq c \leq b$
$\underset{\text{Def.}}{\Rightarrow} c = \sup A$ □

Hauptsatz 1.7.11.

(i) *Es existiert ein vollständiger, durch eine Relation $\leq$ angeordneter Körper $\mathbb{R}$ mit entsprechenden Abbildungen $+$ und $\cdot$.*

(ii) *$\mathbb{R}$ ist (im Wesentlichen) eindeutig bestimmt.*

Definition 1.7.12. Man nennt $\mathbb{R}$ den Körper der reellen Zahlen.

Kapitel II

Zahlenbereiche

$\mathbb{R}$ (inklusive $+$, $\cdot$, $\leq$) ist durch Def. 1.7.12 gegeben!

2.1 Natürliche und ganze Zahlen

Definition 2.1.1.

(i) $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *induktiv* (schreibe $M \in I$) $:\Leftrightarrow$
$1 \in M$ und $x \in M \;\Rightarrow\; x + 1 \in M$.

(ii) $\mathbb{N} := \bigcap\limits_{M \in I} M$ heißt *Menge der natürlichen Zahlen.*

Bemerkung 2.1.2.

- *) $\exists$ induktive Menge, z.B. $\mathbb{R}$ selbst,*
- *) $\mathbb{N}$ formal exakt als kleinste induktive Menge.*

Satz 2.1.3. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{N} : \; n < x < x + 1$

Beweis. Setze $M := \{1, 2, 2, \ldots, n\} \cup \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq n + 1\}$
$\Rightarrow M$ induktiv, insbesondere ist $\mathbb{N} \subseteq M$
Annahme: $\exists x \in \mathbb{N} : \; n < x < n + 1$
$\Rightarrow x \in M \Rightarrow x \leq n \;\vee\; x \geq n + 1$ ↯ $\square$

Folgerung 2.1.4 (Vollständige Induktion)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, also*

(IA) $1 \in M$ *(*„Induktions-Anfang“*)*

(IS) $x \in M \;\Rightarrow x + 1 \in M$ *(*„Induktions-Schritt“*)*

Dann gilt $M = \mathbb{N}$

Beweis. $M \subseteq \mathbb{N}$ nach Voraussetzung, $\mathbb{N} \subseteq M$ nach Def. 2.1.1. $\square$

Satz 2.1.5 (Wohlordnungsprinzip)**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \exists \min A$*

Beweis. Annahme: $\nexists \min A$
Setze $M := \{m \in \mathbb{N} \,|\, \forall a \in A : \; m < a\}$

(IA): $1 \in M$ (denn $1 \in M \Rightarrow \exists a^* \in A \subseteq \mathbb{N} : \; 1 \geq a^*$
$\Rightarrow a^* = 1 \Rightarrow a^* = \min A$ ↯)

(IS): Sei $m \in M$

$\Rightarrow \forall a \in A \;:\; m+1 \leq a$ (denn sonst $\exists a^* \in A \leq :\; m \underset{\substack{\uparrow \\ m \in M}}{<} a^* < m+1$ ↯)

$\Rightarrow \forall \in A \;:\; m+1 < a$ (denn sonst $m+1 \in A \;\wedge\; \forall a \in A \;:\; m+1 \leq a$, d.h. $m+1 = \min A$ ↯)

$\Rightarrow m+1 \in M$

$\underset{Folg.2.1.4}{\Rightarrow} M = \mathbb{N}$

Wegen $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N} = M$ gibt es also $a^* \in A$ mit $a^* \in M$, d.h. $a^* < a^*$. ↯ □

Bemerkung 2.1.6. *Mit* $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n | \, n \in \mathbb{N}\}$ *wie bisher folgt:*
$A \subseteq \mathbb{Z}$, $A \neq \emptyset$, A nach unten (oben) beschränkt
$\Rightarrow \;\exists \min A$ *(*$\max A$*)*

Insbesondere ist für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &:= \max\{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \leq x\} \\ \lceil x \rceil &:= \min\{b \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq b\} \end{aligned}$$

wohldefiniert.

Induktive (rekursive) Definition.

Definition 2.1.7. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{K}$

(i) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to M,\; j \mapsto a_j := f(j)$ heißt *Folge* in M und man schreibt $a := (a_j)_{j \in \mathbb{N}} = (a_j)_{j=1}^{\infty} \subset M$

(ii) Für $a = (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset M$ setzt man

$$\sum_{j=1}^{0} a_j = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{n+1} a_j := \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) + a_{n+1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$
$$\prod_{j=1}^{0} a_j = 1 \qquad \text{und} \qquad \prod_{j=1}^{n+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{n} a_j\right) \cdot a_{n+1} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkung 2.1.8.

(i) Formal exakte Definition von $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *und* $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$

(ii) allgemeiner für $n,\; m \in \mathbb{Z}$*: Folgen* $a = (a_j)_{j=m}^{\infty} = (a_m,\; a_{m+1}, \ldots)$ *und Summen bzw. Produkte mittels „Indexverschiebung“*

$$\sum_{j=m}^{n} a_j := \begin{Bmatrix} 0 & , n < m \\ \sum\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{j+m-1} & , n \geq m \end{Bmatrix}, \quad \prod_{j=m}^{n} a_j := \begin{Bmatrix} 1 & , n < m \\ \prod\limits_{j=1}^{n-m+1} a_{j+m-1} & , n \geq m \end{Bmatrix}$$

(iii) $\sum$, $\prod$ *erfüllen Assoziativ- und Kommutativ-Gesetz.*

Beweis. (i) (IA): $A(n)$ gilt für $n = 1$, denn

$$\sum_{j=1}^{n} (b_{j+1} - b_j) \underset{n=1}{=} \sum_{j=1}^{1} (b_{j+1} - b_j) = b_2 - b_1 \underset{n=1}{=} b_{n+1} - b_1$$

(IS): (IV): $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $A(n+1)$ gilt, denn

$$\sum_{j=1}^{n+1}(b_{j+1}-b_j) \underset{\text{Def.}\sum}{=} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}(b_{j+1}-b_j)\right)}_{\underset{\text{(IV)}}{=} b_{n+1}-b_1} + \left((b_{(n+1)+1}-b_j)\right)$$

$$= b_{(n+1)+1} - b_1$$

(ii) (IA): $\sum\limits_{j=1}^{1} j = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$
(IS):

$$\sum_{j=1}^{n} j + (n+1) \underset{\text{(IV)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)}{2}$$

□

Induktive Beweise(allgemeines Schema)
Behauptung: Aussage $A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

Beweis.

(IA)zeige: $A(1)$ gilt (d.h. $1 \in M := \{n \in M \mid A(n) \text{ } gilt\}$)
(IS) Induktions-Voraussetzung (IV): Es gelte $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (d.h. sie $n \in M$)
Zeige: $A(n+1)$ gilt (d.h. $n+1 \in M$)
$\underset{Folg.2.1.3}{\Rightarrow}$ Beh. (denn $M = \mathbb{N}$)

□

Beispiel 2.1.9.

(i) Teleskop-Summe:
Sei $b = (b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j+1}-b_j) = b_{n+1}-b_1}_{=A(n)}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis. (i) (IA): $A(n)$ gilt für $n = 1$, denn

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{j+1}-b_j) \underset{n=1}{=} \sum_{j=1}^{1}(b_{j+1}-b_j) = b_2 - b_1 \underset{n=1}{=} b_{n+1} - b_1$$

□

Def. 2.1.7 ermöglicht weitere nützliche Definitionen:

Definition 2.1.10. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $x \in \mathbb{K}$, und $n,\ k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$

(i) Man setzt $x^n := \prod\limits_{j=1}^{n} x$ *(n -fache Potenz)*
und falls $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$: $x^{-n} := \left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $n! := \prod_{j=1}^{n} j$ (*n Fakultät*)

(iii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (*Binomialkoeffizient*, n über k)

Bemerkung 2.1.11.

(i) beachte: $x^0 = 1$ *(auch für* $x = 0$*)*

(ii) anschaulich: $x^n = x \cdot \ldots \cdot$ *(n mal),* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $0! = 1$

(iii) einfache Rechenregeln:

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0$$
$$\binom{n}{1} = \frac{n(n-1)!}{1(n-1)!} = n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1)+1)}{(k-1)!}\frac{k}{k} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1)+1)}{k!} \cdot (\underbrace{n-k+1+k}_{=n+1}) \\ &= \frac{(n+1)((n+1)-1)\ldots((n+1)-k+1)}{k!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

für $n, \ k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \leq n$

(iv) Potenzgesetze:
$x, y \in \mathbb{K}, \ r, s \in \mathbb{K} \Rightarrow x^{rs} = (x^r)^s$, $(xy)^r = x^r y^r$, $x^{r+s} = x^r x^s$ *(sofern wohldefiniert)*

(v) Kombinatorik:
M *endliche Menge,* $n := |M|$
$\Rightarrow$ *Es gibt genau* $n!$ *Permutationen (*$\varphi : M \to M$ *bijektiv) von* M
und genau $\binom{n}{k}$ *Teilmengen mit genau* $k \leq n$ *Elementen*

Anwendung: wichtige Gleichungen.

Satz 2.1.12. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper,* $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt:*

(i) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ *(Binomischer Lehrsatz)*

(ii) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} n+1 & \text{, falls } a = 1 \\ a^{n+1} - 1 & \text{, sonst} \end{cases}$ *(geometrische Summe)*

Beweis. (i) Induktion nach n.

(IA): $n = 0: \ (a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$

(IS): (i) gelte für ein $n \in \mathbb{N}_0$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow (a+b)^{n+1} \underset{\text{Bem. 2.1.11(iv)}}{=} &(a+b)^n \\
&\underset{\text{(IV)}}{=} (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= \left[\binom{n}{n}a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}b^{n-k}\right] + \left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0}b^{n+1}\right] \\
&= \binom{n+1}{n+1}a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{0} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{(n+1)-k}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ (i) gilt für $n+1$

(ii) Induktion nach n oder direkt:
Fall $a = 1$:
Fall $a \neq 1$:
(ii) $\Leftrightarrow (a-1)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(a^{k+1}-a^k\right) \overset{\text{Bsp. 2.1.8 (i)}}{=} a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$

□

Bemerkung 2.1.13. *Es folgt unmittelbar:*

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = \begin{cases} 1 & , \textit{ falls } n = 0 \\ 0 & , \textit{ falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n,\ n \in \mathbb{N}_0,$
(Insbesondere: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ *für endliche Mengen* M*)*

(iii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = \underset{\binom{2}{0}=1}{\overset{\uparrow}{}} a^2 + \underset{\binom{2}{1}=2}{\underset{\uparrow}{2}}\, ab + \underset{\binom{2}{2}=1}{\overset{\uparrow}{}} b^2$

Satz 2.1.14. *Sei* $\mathbb{K}$ *durch* $\leq$ *angeordneter Körper und*

(i) $a \in \mathbb{K}$ *mit* $a \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow (1+a)^n \geq 1 + na$ *(Bernoulli-Ungleichung)*

(ii) $(a_j)_j \subset \mathbb{K}$ *Folge in* $\mathbb{K}$, *mit* $a_j \geq 0\ \forall\, j, n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \prod\limits_{j=1}^{n} a_j \leq \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)^n$ *(AGM-Ungleichung)*

Bemerkung. „AGM" wegen äquivalenter Form:

$\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$	$\geq$	$\left(\prod\limits_{j=1}^{n} a_j\right)^{\frac{1}{n}}$
arithmetisches Mittel	$\geq$	geometrisches Mittel

Beweis. Induktion nach n:

(i) : IA: $n=0$: $(1+a)^0 = 1 = 1+ = a$
IS: $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a)$

$$\underset{\substack{(\mathrm{IV}),\\ 1+a\geq 0}}{\geq} (1+na)(1+a)$$

$$= 1+(n+1)a+na^2$$

$$\underset{a^2\geq 0}{\geq} 1+(n+1)a$$

(ii) : IA: $n=1$: $\prod\limits_{j=1}^{1} a_j = a_1 = \left(\frac{1}{1}\sum\limits_{j=1}^{1} a_j\right)^1$

IS: o.B.d.A. $a_j > 0 \ \forall j$

Aussage gelte für ein $N \in \mathbb{N}$,

setze $A := \frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=1}^{n+1} a_j$, $B := \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$,

$$P := \prod_{j=1}^{n+1} a_j, \qquad Q := \prod_{j=1}^{n} a_j$$

also zu zeigen: $Q \leq B^n \ \Rightarrow \ P \leq A^{n+1}$

klar: $(n+1)\ A = nB + a_{n+1}$,

$$P = Qa_{n+1}.$$

Wollen (i) für $Q := \frac{a_{n+1}-B}{(n+1)B}$ verwenden,

dazu : •) $(n+1)B > 0$, d.h. a wohldefiniert.

•) $a \geq -1$ wegen

$$a = \frac{a_{n+1}-B}{(n+1)B} \geq \overset{(n+1)B>0}{\Leftrightarrow} a_{n+1} - B \geq -(n+1)B$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + nB \geq 0$$

Nun

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)A}{(n+1)B}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{(n+1)A-(n+1)B}{(n+1)B}\right)^{n+1}$$

$$= \left(1+\frac{nB+a_{n+1}-(n+1)B}{(n+1)B}\right)^{n+1}$$

$$= (1+a)^{n+1}$$

$$\underset{(i)}{\geq} 1+(n+1)a = 1+\frac{a_{n+1}-B}{B} = \frac{a_{n+1}}{B}$$

$$\underset{|\cdot B^{n+1}}{\Rightarrow} A^{n+1} \geq a_{n+1}B^n \geq a_{n+1}Q = P$$

□

2.2 Rationale und reelle Zahlen

2.2.1 Betrag und Abstand auf $\mathbb{R}$

Definition 2.2.1. Für $x, y \in \mathbb{K}$ heißt

(i) $|x| := \left\{\begin{array}{ll} x & \text{, falls } x > 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{array}\right\}$ *Betrag* von x

(ii) $d(x,y) := |x-y|$ *Abstand* von x und y

Satz 2.2.2.

(i) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\forall x, y \in \mathbb{R}$*:*

(N1) $|x| \geq 0$ *(Nichtnegativität)*

(N2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(Definitheit)*

(N3) $|xy| = |x||y|$ *(absolute Homoginität)*

(N4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecks-Ungleichung)*

Außerdem ist für $a \geq 0$

$$|x| \leq \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

Insbesondere also $|-x| = |x|$ *und* $-|x| \leq x \leq |x|$

(ii) $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$*:*

(D1) $d(x,y) \geq 0$ *(Nichtnegativ)*

(D2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(Definitheit)*

(D3) $d(x,y) = d(y,x)$ *(Symmetrie)*

(D4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *(Dreiecks-Ungleichung)*

Bemerkung. (N1)-(N4) definieren „Norm“
(D1)-(D4) definieren „Metrik“

Beweis.

(i) •)Abbildung, (N1)-(N3) klar nach Def. 2.1.1
•)„Außerdem “:
„$\Rightarrow$ “: Fall $x \geq 0 \;\Rightarrow\; -a \leq 0 \leq x = |x| \leq a$
Fall $x < 0 \;\Rightarrow\; -x = |x| \leq a \;\Rightarrow\; -a \leq x \leq 0 \leq a$
„$\Leftarrow$ “: $-a \leq x \leq a \;\Rightarrow\; x \leq a$ und $-x \leq a \;\Rightarrow\; |x| \leq a$
„Insbesondere “:
(N3) für $y = -1$ bzw. „Außerdem “für $a = |x|$ anwendem
•)(N4):Fall $x + y \geq 0$:
$\Rightarrow\; |x+y| = x + y \underset{2x \text{ Insb.}}{\leq} |x| + |y|$
Fall $x + y <=$:
$\Rightarrow\; |x+y| = -(x+y) = (-x) + (-y) \underset{2x \text{ Insb.}}{\leq} |-x| + |-y| \underset{2x \text{ Insb.}}{=} |x| + |y|$

(ii) (D1): $d(x,y) = |x-y| \underset{(N1)}{\geq} 0$

(D2): $|x-y| = 0 \underset{(N2)}{\Leftrightarrow} x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

(D3): $|x-y| \underset{\text{Insb.}}{=} |-(x-y)| = |y-x|$

(D4): $|x-y| = |(x-z)+(z-y)| \underset{(N4)}{\geq} |x-z|+|z-y|$

□

Folgerung 2.2.3. *Es gilt:*

(i) für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. $|x-y| \underset{(\leq)}{<} \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \underset{(\leq)}{<} x-y \underset{(\leq)}{<} \varepsilon \Leftrightarrow y-\varepsilon \underset{(\leq)}{<} x \underset{(\leq)}{<} y+\varepsilon$

(ii) für $x, y \in \mathbb{R}$
$|x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|$

(iii) $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt $\Leftrightarrow \exists\, s \geq 0 : \forall x \in M : |x| \leq s$

Beweis. (i) für „$\leq$“↑ „Außerdem “in Satz 2.2.2, „$<$“analog

(ii) •)1. Ungleichung (Fall $-$, Rest analog):
$|x| = |(x-y)+y| \underset{(N4)}{\leq} |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|,$
sowie mit vertauschten Rollen $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$
•)2. Ungleichung: (N4) für x, y bzw. $x, -y$

(iii) M beschränkt $\Leftrightarrow$ M nach oben und unten beschränkt
$\Leftrightarrow \exists s_u, s_o \in \mathbb{R} : \forall x \in M : s_u \leq x \leq s_o$
„$\Rightarrow$“: $\exists s := \max\{|s_u|, |s_o|\} \geq 0 : \forall x \in M : -s \leq x \leq s$
„$\Leftarrow$“: setze $s_u := -s$, $s_o := s$

□

2.2.2 $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Definition 2.2.4.

$$\mathbb{Q} := \bigcap_{\substack{\mathbb{L}\subseteq\mathbb{R} \\ \text{Teilmenge}}} \mathbb{L} \text{ rationale Zahlen}$$

Bemerkung 2.2.5. *Man zeigt leicht:* $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} | \, \exists p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : \, x = \frac{p}{n}\}$

Satz 2.2.6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b \; \exists x \in \mathbb{Q} : \; a < x < b$

Beweis. Setze $n := \left\lceil \frac{2}{b-a} \right\rceil$
$\Rightarrow \; n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq \frac{2}{b-a} > 0$
$\Rightarrow \; n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq \frac{b-a}{2}$ (*)
Setze $p := \left\lfloor n \cdot \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
$\Rightarrow \; p \in \mathbb{Z}$ mit $p \leq n\frac{a+b}{2} < p + 1$ (**)
Dann gilt für $x := \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$:

1.) $x \underset{(**)}{\leq} \frac{a+b}{2} \underset{a<b}{<} \frac{b+b}{2}$

2.) $x = \frac{p+1-1}{n} \underset{(**)}{>} \frac{a+b}{2} - \frac{1}{n} \underset{(*)}{\geq} \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$

□

Folgerung 2.2.7. $\forall x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 : \; \exists q \in \mathbb{Q} : \; d(q, x) < \varepsilon$

Beweis. Satz 2.2.6 für $a := x - \varepsilon < x + \varepsilon =: b$ $\boxed{\text{Bild}}$
$\Rightarrow \; \exists q \in \mathbb{Q} : \; \underbrace{x - \varepsilon < q < x + \varepsilon}_{\underset{\text{Folg. 2.2.3}}{\Leftrightarrow} \varepsilon > |q-x| \underset{\text{Def.}}{=} d(q,x)}$ □

2.2.3 Wurzeln

Lemma 2.2.8. *$\forall n \in \mathbb{N},\ b \in \mathbb{R}$ mit $b > 1$ $\exists q \in \mathbb{Q}$, so dass $q > 1$ und $1 < q^n < b$.*

Beweis. Induktion
(IA): $n = 1$: Satz 2.2.6
(IS): Sei $x \in \mathbb{Q}$ mit $x > 1$ und $1 < x^n < b$ für ein $n \in \mathbb{N}$
Setze $c := \frac{b}{x^n} > 1$
$\underset{\text{Satz 2.2.6}}{\Rightarrow} \exists q \in \mathbb{Q}\ :\ 1 < q < \min\{x, y\}$
$\Rightarrow\ 1 \underset{(1<q)}{<} q^{n+1} < qq^{n+1} \underset{q<\min\{x,c\}}{<} cx^n = b$ $\square$

Satz 2.2.9. *$\forall n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ $\exists!\, x \in \mathbb{R}$, so dass $x \geq 0$ und $x^n = a$.*

Beweis. Seien $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ mit $a \leq 0$.
1. Fall: $a = 0$:

$x := 0\ \Rightarrow\ x^n = 0 = a$ ($\Rightarrow$ Existenz)
und $x > 0 \Rightarrow\ y^n > 0$ ($\Rightarrow$ Eindeutigkeit)

2. Fall: $a > 0$:

-) Existenz:
  Betrachte $M_a := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \geq 0,\ q^n \leq a\} \subseteq \mathbb{R}$
  $\Rightarrow$

  1.) $M_a \neq \emptyset$, denn $0 \in M_a$
  2.) M_a nach oben beschränkt, denn $a + 1 \in \mathcal{O}(M_a)$
  $$\left(q > a+1 > 0 \Rightarrow q^n > (a+1)^n \geq \begin{Bmatrix} a^n, & a > 0 \\ 1, & a \leq 1 \end{Bmatrix} \geq a \Rightarrow q \notin M_a\right)$$
  $\underset{\substack{\mathbb{R}\text{ vollst.}\\ \text{(Def. 1.7.9)}}}{\Rightarrow} \exists x := \sup M_a \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$ (da $0 \in M_a$)

  bleibt zu zeigen: $x^n = a$

  Annahme: $x^n > a$
  $\underset{a>0}{\Rightarrow} \frac{x^n}{a} > 1 \underset{\text{Lem. 2.2.8}}{\Rightarrow} \exists q \in \mathbb{Q}\ :\ 1 < q,\ 1 < q^n < \frac{x^n}{a}$
  $\Rightarrow 0 < a < \left(\frac{x}{q}\right)^n \Rightarrow 0 < \frac{x}{q} \in \mathcal{O}(M_a)$
  (denn $y \geq \frac{x}{q} \Rightarrow y^n \geq \left(\frac{x}{q}\right)^n > a \Rightarrow y \notin M_a$)
  aber $\frac{x}{q} < x$ wegen $q > 1$ ↯ zu $x = \sup M_a$
  $\Rightarrow\ 0 \leq x^n \leq a$

  Annahme: $0 < x^n < a$
  $\Rightarrow x > 0$ und $1 < \frac{a}{x^n}$
  $\underset{\textit{Lem.2.2.8}}{\Rightarrow} \exists q \in \mathbb{Q} : 1 < q,\ 1 < q^n < \frac{a}{x^n}$ (*)
  $\Rightarrow 0 < x < qx$ wegen $q > 1$
  $\underset{\textit{Satz2.2.6}}{\Rightarrow} \exists \tilde{q} \in \mathbb{Q}\ :\ x < \tilde{q} < qx$
  $\Rightarrow x^n < (\tilde{q})^n < (qx)^n \underset{(*)}{<} a$
  $\Rightarrow \tilde{q} \in M_a$ ↯ zu $\tilde{q} > x = \sup M_a$
  $\Rightarrow x^n \in \{0, a\}$

  Annahme: $x^n = 0 < a$
  $\underset{\textit{Satz2.2.6}}{\Rightarrow} x = 0$ und $\exists q \in \mathbb{Q}\ :\ 0 < q < \min\{a, 1\}$

$\Rightarrow x^n = 0 < q^n < (\min\{a,1\})^n \leq a$
$\Rightarrow q \in M_a$ ↯ zu $q > 0 = x = \sup M_a$
$\Rightarrow x^n = a$

•) Eindeutigkeit:
Seien $x, y > 0$ mit $x^n = a = y^n$
$\Rightarrow \underbrace{0 < x < y}_{\Rightarrow a = x^n < y^n \text{ ↯}} \vee 0 < x = y \vee \underbrace{x > y > 0}_{\Rightarrow a = x^n > y^n \text{ ↯}}$

□

Definition 2.2.10. Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt $x \geq 0$ mit $x^n = a$ aus Satz 2.2.9 *n-te Wurzel* von a und man schreibt $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (sowie $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$).

Bemerkung 2.2.11.

(i) *Beweis von Satz 2.2.9 zeigt:*
$a^{\frac{1}{n}} = \sup\{q \in \mathbb{Q} | \, q \geq 0, \; q^n \leq a\}$

(ii) *Für $a \geq 0$ gibt es i.A. n Lösungen von $x^n = a$ (z.B. $x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \vee x = 1$), aber stets nur genau eine in $\{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 0\}$ von*

(iii) *Für $a < 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ (bisher) <u>nicht</u> erklärt!*

(iv) *Nun auch Potenzen von $a \geq 0$ mit Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ wohldefiniert*

$$a^q := \begin{cases} \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m & , \textit{ falls } q = \frac{m}{n} \textit{ mit } n, m \in \mathbb{N} \\ 1 & , \textit{ falls } q = 0 \\ \frac{1}{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m} & , \textit{ falls } q = -\frac{m}{n} \textit{ mit } n, m \in \mathbb{N} \textit{ und } a \neq 0 \end{cases}$$

(insbesondere unabhängig von der Darstellung von $q \in \mathbb{Q}$)
und es gelten die üblichen Potenzgesetze:
$a, b > 0, \; r, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^{rs} = (a^r)^s, \; (ab)^r = a^r b^r, \; a^{r+s} = a^r a^s$

(vgl. Bem 2.1.11((iv)),)

Weitere Anwendung: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Satz 2.2.12. *$\forall a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}: \; a < x < b$*

Beweis. $2\times$ Satz 2.2.6 $\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{Q} \; : \; a < p < q < b$
$x := p + \frac{q-p}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \Rightarrow a \underset{q>p}{<} x \underset{\sqrt{2}>1}{<} q < b$

<u>Annahme</u>: $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{q-p}{x-p} \in \mathbb{Q}$ ↯ zu Satz 1.1.8 □

2.2.4 Intervalle und Umgebungen

Wichtige spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition 2.2.13.

(i) $\emptyset \neq I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Intervall* $:\Leftrightarrow$
$\forall a, b \in \mathbb{R}: \; a < b < b \Rightarrow x \in I$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ heißt
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall*
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *offenes Intervall*
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *halboffenes Intervall*
bzw. analog $(a, b]$

(iii) Analog definiert man für $a, b \in \mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$, sowie $(-\infty, b),\; [a, \infty),\; (a, \infty)$ und $(-\infty, \infty)$

(iv) Für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \geq 0$ heißt

$$U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

Epsilon-Umgebung von a

Bemerkung 2.2.14.

(i) Alle in Def. 2.2.13 sind Intervalle gemäß (i). Insbesondere auch $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ *und* $U_\varepsilon = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. *(Folg. 2.2.3)*

(ii) Mengen in (ii), (iv) beschränkt gemäß Bem. 1.7.5, in (iii) unbeschränkt.

(iii) Visualisierung $\boxed{\textit{Bild}}$

2.3 Komplexe Zahlen

$\nexists x \in \mathbb{R}\,;\ x^2 = -1$ (da $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 > -1$)
Suche Zahlenbereichserweiterung, die alle reellen Zahlen enthält, Körperaxiome erfüllt ($\Rightarrow$ bekannte Rechenregeln sichert) und Lösbarkeit solcher Gleichungen garantiert bisher Zahlengerade $\boxed{\text{Bild}}$ (bereits vollständig, d.h. ohne „Lücken “).
Jetzt „zusätzliche Dimension“; *Gauß’sche Zahlenebene.* $\boxed{\text{Bild}}$

2.3.1 Normaldarstellung

Definition 2.3.1.

(i) Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt $z = (x, y)$ *komplexe Zahl* mit *Realteil* $\mathrm{Re}(z) := x$ und *Imaginärteil* $\mathrm{Im}((z)) := y$

(ii) $\mathbb{C} = \{z = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ heißt *Menge der komplexen Zahlen*

(iii) $i := (0, 1) \in \mathbb{C}$ heißt *imaginäre Einheit*

(iv) Man nennt die Abbildungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z + w := (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto zw := (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w), \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)) \end{aligned}$$

Addition bzw. *Multiplikation* auf $\mathbb{C}$
und

$$\begin{aligned} \overline{} : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \overline{z} := (\mathrm{Re}(z), -\mathrm{Im}(z)) \end{aligned}$$

heißt *Konjugation* auf $\mathbb{C}$

Bemerkung 2.3.2.

(i) Darstellung von $z \in \mathbb{C}$ als geordnete Paare $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, d.h. Koordinaten in der Ebene. $\boxed{\textit{Bild}}$
Insbesondere sind $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$ für $z = (x, y)$ stets reelle Zahlen!

(ii) $\mathbb{C}$ enthält $\mathbb{R}$ als $\{z = (x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\} =: \mathbb{R}'$ und man vereinbart die Schreibweise $(x, 0) =: x$ falls $x \in \mathbb{C} \cap \mathbb{R}'$.
Legitim, da

$$\begin{aligned} x + u = (x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0) = x + u, \\ xu = (x, 0)(u, 0) = (xu, 0) = xu \end{aligned}$$

d.h. $+|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ und $\cdot|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ sind gewöhnliche Addition/Multiplikation auf $\mathbb{R}$.

(iii) Wegen

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(x, 0)}_{=x} + \underbrace{(0, 1)}_{=i}\,\underbrace{(y, 0)}_{=y} \text{ (nach Konvention)}$$

schreibt man auch

$$z = x + iy = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \qquad \text{(„Normaldarstellung“)}$$

(iv) *Physiker schreiben j statt i für $(0,1) \in \mathbb{C}$*

(v) *Es gilt*

$$i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$$

d.h. $z = i$ löst $z^2 = -1$ in $\mathbb{C}$ (ebenso $z = -i$)

(vi) *$+$ entspricht Vektoraddition und $(\overline{})$ entspricht Spiegelung an reeller Achse.*
$\boxed{\textit{Bild}}$

Satz 2.3.3. *$\mathbb{C}$ mit $+, \cdot$ aus Def. 2.3.1 ist ein Körper und enthält $\mathbb{R}$ als Teilkörper.*

Beweis.

- Körper: Zeige (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) aus Def. 1.6.1 (Wohldefiniertheit von $+, \cdot$ klar nach Konstruktion!) durch Nachrechnen.

  dabei ist
  $0 = (0,0)$ neutrales Element der Addition
  $1 = (1,0)$ neutrales Element der Multiplikation
  $-z := (-1) \cdot z = -\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ additive Inverse zu $z \in \mathbb{C}$
  $\frac{1}{z} := \frac{1}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}(\mathrm{Re}(z), -\mathrm{Im}(z))$ multiplikatives Inverse zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
  (beachte $z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$)

  ($\uparrow$ Übung)

- $\mathbb{R}$ als Teilkörper: Def. 1.6.10 + Bem. 2.3.2 (ii)

□

Es gelten nützliche Regeln bzgl. Konjugation:

Proposition 2.3.4. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\overline{(\overline{z})}$ *und* $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$ *(falls $sz \neq 0$),* $\overline{-z} = -\overline{z}$

(ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

(iii) $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}$

(iv) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ *und* $z \in \{iy \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R}\} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

(v) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ *und*
$z - \overline{z} = i2\mathrm{Im}(z) \in \{iy \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R}\}$

Beweis. Nachrechnen ($\uparrow$ Übung)
Z.B. zu (ii):
Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{zw} &= \overline{(z = x + iy)(w = u + iv)} \\
&= \overline{xu - yv + i(xv + yu)} \\
&= xu - yv + i(xv + yu) \\
&= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) \\
&= (x + i(-y))(y + i(-v)) \\
&= \overline{x + iy} \cdot \overline{u + iv} \\
&= \overline{z} \cdot \overline{w}
\end{aligned}$$

oder zu (iv):

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(\overline{z}) \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(\overline{z}) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z) \wedge \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Satz 2.3.5. $\mathbb{C}$ *kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Annahme: Der Körper $\mathbb{C}$ sei durch $\leq$ angeordnet.
$\underset{\text{Satz 1.6.7(iv)}}{\Rightarrow} \forall z \in \setminus\{0\}: \ z^2 > 0$ und $1 > 0$
$\underset{\substack{z=i\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \\ \text{Bem. 2.3.3(v)}}}{\Rightarrow} -1 = i^2 > 0 \Rightarrow 0 > 1$ ↯ zu

□

Für komplexe Zahlen lässt sich aber deren Abstand zu 0 vergleichen. $\boxed{\text{Bild}}$

2.3.2 Betrag und Abstand auf $\mathbb{C}$

Definition 2.3.6. Für $z, w \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

(i) $|z| := \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$ *Betrag* von z

(ii) $d(z,w) := |z - w|$ *Abstand* von z und w

(iii) $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\}$ ε-*Umgebung* um z

Bemerkung 2.3.7.

- *Natürliche Erweiterung der Begriffe von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$*
  $\boxed{\textit{Bild}}$
- *Beachte: $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a,b)$ offen in $\mathbb{R}$ aber nicht in $\mathbb{C}$!*

Satz 2.3.8. *Betrag/Abstand auf $\mathbb{C}$ erfüllen die Norm-/Metrikaxiome (N1)-(N4) bzw. (D1)-(D4) aus Satz 2.2.2.*
Außerdem gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$

(i) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$

(ii) $|\overline{z}| = |z| = |-z|$

(iii) $\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$ *und*
$\mathrm{Im}(z) \leq |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

(iv) $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$

Beweis.

(i) $\uparrow$ Prop. 2.3.4(iii)

(ii) $|\overline{z}| \underset{(i)}{=} \sqrt{\overline{z}\ \overline{\overline{z}}} = \sqrt{\overline{z}\ z} = |z| = \sqrt{\overline{-z}(-z)} = |-z|$

(iii) $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(2)^2} \underset{\text{Bem. 2.211}}{\geq} \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)| \geq \mathrm{Re}(z)$

(iv) $\uparrow$ Bew. Folg. 2.2.3
(N1)-(N4),(D1)-(D4): $\uparrow$ Übung
z.B. (N4):
$$w\overline{z} + z\overline{w} = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \overset{\substack{Prop.2.3.4(v)\\ \downarrow}}{=} 2|\mathrm{Re}(z\overline{w})| \overset{\text{(iii)}}{\leq} 2|z\overline{w}| \overset{\text{(N3),(ii)}}{=} 2|z||w| \qquad (*)$$
$$\Rightarrow |z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = z\overline{z} + w\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{w} \overset{\text{(i),(*)}}{\leq} |z| + 2|z||w| + |w| = (|z| + |w|)^2$$

$\square$

Definition 2.3.9. $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt beschränkt $:\Leftrightarrow \exists r > 0\ M \subseteq U_r(0)$

Beispiel 2.3.10. (vgl. auch Folg. 2.2.3 (iii))
$\boxed{\text{Bild}}$

2.3.3 Polardarstellung

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\exists! w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: $z = |z|w$
$\Rightarrow |w| = 1$ und $\mathrm{Re}(w) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \cos(\varphi)$, $\mathrm{Im}(w) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \sin(\varphi)$
$\Rightarrow \exists!\, \varphi \in [0, 2\pi) : z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$
Für $z = 0$ gilt die Darstellung mit beliebigem Winkel φ.

Definition 2.3.11. Die Darstellung von $z \in \mathbb{C}$ als $z = r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ heißt *Polardarstellung.* Dabei heißt $\arg(z) := \varphi$ *Argument* von z

Bemerkung 2.3.12. *Hier Winkel im Bogenmaß ($\varphi \in (0, 2\pi]$ statt Gradmaß $\varphi \in [0°, 360°)$), wobei $\pi \approx 3,1415 \approx \frac{22}{7}$ Kreiszahl und* $\sin / \cos$ *Winkelfunktionen.*
$\boxed{\textit{Bild}}$

Bogenmaß	*Gradmaß*	sin	cos
0	$0°$	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0

Zeigen später für $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}) = \cos(\varphi) \quad \textit{(Phasenverschiebung)}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\varphi + 2k\pi) &= \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi + 2k\pi) &= \cos(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \textit{(Periodizität)}$$

$$\cos(-\varphi) = \cos(\varphi) \quad \textit{(gerade)}$$

$$\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi) \quad \textit{(ungerade)}$$

$$\sin(\varphi)^2 + \cos(\varphi)^2 = 1 \quad \textit{(Pythagoras)}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) \\ \sin(\varphi + \psi) &= \cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi) \end{aligned}\right\} \quad \textit{(Additionstheoreme)}$$

Proposition 2.3.13. *Seien $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, $w = s(\cos(\psi) + i\sin(\psi)) \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(i) $zw = rs(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$

(ii) $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$ *„Formel von Moivre“*

Beweis. $\uparrow$ Übung

(i) Additionstheoreme und $i^2 = -1$ nutzen

(ii) Induktion nach n ((i) nutzen!)

$\square$

Bemerkung 2.3.14.

- *Länge multiplizieren, Winkel addieren.*
  $\boxed{\textit{Bild}}$

- *Es folgt leicht für* $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \neq 0$

  $$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = \frac{1}{r}(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))$$

  und damit

  $$\frac{w}{z} = \frac{s}{r}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$$

  $\boxed{\textit{Bild}}$
  (Länge dividieren, Winkel subtrahieren)

2.3.4 Wurzeln

Suchen analog zu Satz 2.2.9 $w \in \mathbb{C}$, sodass für gegebenes $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt dass $w^n = z$.

Satz 2.3.15. *Für $n \in \mathbb{N}$ und $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau n Zahlen $w_0,\ w_1, \dots, w_{n-1}$ mit $w_k^n = z$, nämlich*

$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\psi_k) + i\sin(\psi_k))$

wobei $\psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots, n-1$

Beweis. Wegen $z \neq 0$ folgt aus $w^2 = z$, das $w \neq 0$, d.h. $w = \rho(\cos(\psi) + i\sin(\psi))$ mit $\rho > 0$, $\psi \in \mathbb{R}$.
Also

$$\begin{aligned}
& w^n = z \\
\Leftrightarrow\ & [\rho(\cos(\psi) + i\sin(\psi))]^n = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
\underset{\text{Moivre}}{\Leftrightarrow}\ & \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) \\
\Leftrightarrow\ & \rho^n = r \ \wedge\ n\psi = \varphi + 2k\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\
\underset{r>0}{\Leftrightarrow}\ & \rho = \sqrt[n]{r} \ \wedge\ \psi = \psi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \text{ mit } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}
\end{aligned}$$

da nur diese ψ_k auf verschiedene Winkel führen. □

Definition 2.3.16. Für $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißen die $w_k \in \mathbb{C},\ k = 0, \dots, n-1$ mit $w_k^n = z$ aus Satz 2.3.15 die *n-te Wurzeln* von z.

Folgerung 2.3.17. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $w^n = 1$*

$$\Leftrightarrow w = w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \textit{mit } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Diese n-ten Einheitswurzeln bilden ein regelmäßiges n-Eck auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.3.18.

(i) $n = 3$ in Folg. 2.3.17 :

$$\begin{aligned}
w_0 = 1, \quad w_1 &= \cos(\tfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{3}), & w_2 &= \cos(\tfrac{4\pi}{3}) + i\sin(\tfrac{4\pi}{3}) \\
&= -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3} & &= -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Bild}}$

$z \in \mathbb{R} \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{z}$ (reelle Wurzel)
und falls $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}:\ w_m = -\sqrt[2m]{z}$

$\boxed{\text{Bild}}$

$z \in \mathbb{R}$ mit $z < 0$ und $n = 2$
$\Rightarrow \varphi = \pi$

$$\Rightarrow w_k = \sqrt{|z|}\left(\cos(\tfrac{\pi + 2k\pi}{2}) + i\sin(\tfrac{\pi + 2k\pi}{2})\right) = \sqrt{|z|}(0 + i \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)}_{=\begin{cases} 1, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \end{cases}})$$

$\boxed{\text{Bild}}$

2.3.5 Polynome und ihre Nullstellen

Definition 2.3.19. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ wobei $a_n \neq 0$.
Dann heißt

(i) die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *(komplexes) Polynom* von Grad $\mathrm{grad}(p) = n$ mit Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$

(ii) a_n *Leitkoeffizient* vom p

(iii) $b \in \mathbb{C}$ *Nullstelle* von $p :\Leftrightarrow p(b) = 0$

Beispiel 2.3.20. Reelle Polynome als Spezialfall:

$p(z) = (z-3)(z+1) = z^2 - 2z - 3$

hat Grad $n = 2$, Koeffizienten $a_0 = -3,\ a_1 = -2,\ a_2 = 1$ und Nullstellen $b_1 = -1,\ b_2 = 3$ $\boxed{\text{Bild}}$

Satz 2.3.21. *Für $n \in \mathbb{N}$ sie p ein Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizent a_n. Dann existiert eine Nullstelle $b \in \mathbb{C}$ von p und ein Polynom q von Grad $n-1$ mit Leitkoeffizent a_n, sodass*

$$p(z) = (z-b)q(z)\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. 1) Existenz einer Nullstelle b

2) zeige induktiv: für $z, b \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$z^{k+1} - b^{k+1} = (z-b)\sum_{j=0}^{k} z^j b^{k-j} \qquad (*)$$

2) Konstruktion von q:
setze $c_j := \sum_{k=j}^{n-1} a_{k+1} b^{k-j}$, $j = 0, \ldots, n-1$ (insbesondere $c_{n-1} = a_n b^0 = a_n \neq 0$) und
$q(z) := \sum_{j=0}^{n-1} c_j z^j$
$\Rightarrow$ q Polynom von Grad $n-1$ und

$$\begin{aligned}
p(z) &= p(z) - p(b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n} a_k b^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k (z^k - b^k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (z^{k+1} - b^{k+1}) \\
&\overset{(*)}{=} (z-b) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} a_{k+1} z^j b^{k-j} \\
!!! &\overset{(**)}{=} (z-b) \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=j}^{n-1} a_{k+1} b^{k-j}}_{=c_j} z^j \\
&= (z-b)q(z)
\end{aligned}$$

□

Folgerung 2.3.22 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Für $n \in \mathbb{N}$ sei p Polynom von Grad n mit Leitkoeffizenten a_n. Dann besitzt p genau n Nullstellen (inklusive Vielfachheiten) $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ und es gilt*

$$p(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Induktion nach n mit Satz 2.3.21. □

Satz 2.3.23 (Identitätssatz für Polynome)**.** *Stimmen Polynome $p, \tilde{p}$ an $m >$ $\max\{\operatorname{grad}(p), \operatorname{grad}(\tilde{p})\} \in \mathbb{C}$ verschiedenen Stellen überein, so gilt $p = \tilde{p}$ auf ganz $\mathbb{C}$.*

Beweis. OBdA $g := \operatorname{grad}(p) \geq \operatorname{grad}(\tilde{p}) = \tilde{g}$

$\Rightarrow q(z) := p(z) - \tilde{p}(z) = \sum_{k=0}^{g} a_k z^k - \sum_{K=0}^{\tilde{g}} \tilde{a}_k z^k = \sum_{k=0}^{G} c_k z^k$

für gewisse $c_0, \ldots, c_G \in \mathbb{C}$ wobei $G \in \{0, \ldots, g\}$

$\Rightarrow$ q Polynom von Grad G oder $q \equiv 0$

<u>Annahme</u>: Polynom von Grad $G = 0$

$\Rightarrow$ $q(z) = c_0 \neq 0$ ↯ zu $q(z) = 0$ für $m \in \mathbb{N}$, Werte $z \in \mathbb{C}$

<u>Annahme</u>: Polynom von Grad $G \in \{1, \ldots, g\}$

$\Rightarrow$ $q(z) = c_G \prod_{k=0}^{G} (z - z_k)$ für $z_1, \ldots, z_G \in \mathbb{C}$ ↯ zu $q(z) = 0$ für $m > g \geq G$ Werte $z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $q \equiv 0$ $\Rightarrow$ $p = \tilde{p}$ auf $\mathbb{C}$ □

Bemerkung 2.3.24. *(i) Beweis zeigt: Polynome stimmen überein $\Leftrightarrow$ alle Koeffizienten stimmen überein.*

(ii) p Polynom mit reellen Koeffizienten a_k, $k = 0, \ldots, n$ und Nullstellen $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\overline{z}$ auch Nullstelle von p.

Beweis. $0 = p(z) = \overline{p(z)} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} \underset{\substack{\uparrow \\ a_k \in \mathbb{R}}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\overline{z}\right)^k = p(\overline{z})$ □

2.4 Topologische Grundbegriffe

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Definition 2.4.1. Für $M \subseteq \mathbb{K}$ heißt

(i) $a \in M$ *innerer Punkt* von M $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \subseteq M$

(ii) $\overset{\circ}{M} = \{a \in M \mid a \text{ innerer Punkt}\} \subseteq M$ *Inneres* von M

(iii) M *offen* $:\Leftrightarrow M = \overset{\circ}{M}$

(iv) M *abgeschlossen* $:\Leftrightarrow \mathbb{K} \setminus M$ offen

(v) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq \mathbb{K} abg.: \\ M \subseteq A}} A$ *Abschluss* von M in $\mathbb{K}$

(vi) $\partial M := \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$ *Rand* von M

(vii) $c \in \partial M$ *Randpunkt* von M

(viii) $a \in M$ *isolierter* Punkt in M
$:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}$

(ix) $x \in \mathbb{K}$ *Häufungspunkt* von M
$:\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists y_\varepsilon \in (U_\varepsilon(x) \cap M) \setminus \{x\}$

Proposition 2.4.2. *Sei $M \supseteq \mathbb{K}$. Dann*

(i) $a \in M \Rightarrow a$ entweder Häufungspunkt von M oder isoliert in M

(ii) M abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Jeder Häufungspunkt von M liegt in M

Beweis. $\uparrow$ Übung

(i) Sei $a \in M$.
<u>Fall 1</u>: a ist Häufungspunkt
<u>Fall 2</u>: a ist kein Häufungspunkt $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (U_\varepsilon(a) \cap M) \setminus \{a\} = \emptyset \underset{a \in U_\varepsilon \cap M}{\Rightarrow}$ $U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}$, d.h. a isoliert.

(ii) „$\underset{\sim}{\Rightarrow}$“: Sei M abgeschlossen und x Häufungspunkt von M.
<u>Annahme</u>: $x \in \mathbb{K} \setminus M$
M abgeschlossen $\Rightarrow \mathbb{K} \setminus M$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq \mathbb{K} \setminus M \Rightarrow U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ ↯ zu x Häufungspunkt.
„$\underset{\sim}{\Leftarrow}$“: <u>Annahme</u>: M nicht abgeschlossen
$\Rightarrow \mathbb{K} \setminus M$ nicht offen
$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{K} \setminus M : x$ nicht innerer Punkt von $\mathbb{K} \setminus M$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$
$\underset{x \in \mathbb{K} \setminus M}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists y \in (U_\varepsilon(x) \cap M) \setminus \{x\}$
$\Rightarrow x$ ist Häufungspunkt von M ↯ zu $x \in \mathbb{K} \setminus M$

□

Beispiel 2.4.3.

(i) $(a, b] \subset \mathbb{R}$ weder offen noch abgeschlossen, aber $\overline{(a, b]} = [a, b]$ abgeschlossen, $\overset{\circ}{\overbrace{(a, b]}} = (a, b)$

(ii) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \emptyset$ offen <u>und</u> abgeschlossen

(iii) $(a, b) \subset \mathbb{C}$ nicht offen

(iv) $\{0\} \cup [7, 12) \;\Rightarrow$ 0 isoliert
$0, 7, 12$ Randpunkte
$[7, 12]$ Häufungspunkte

(v) $\{(-1)^k + \frac{1}{k}\}$ hat Häufungspunkte ± 1

Kapitel III

Folgen und Reihen

3.1 Konvergenz von Folgen

Im Folgenden stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 3.1.1. Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt

(i) *konvergent* $:\Leftrightarrow\ \exists a \in \mathbb{K}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall k > N : |a_k - a| < \varepsilon$
Ggf. heißt a *Grenzwert/Limes* von $(a_k]_{k\in\mathbb{N}}$ und man schreibt $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ oder $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

(ii) *Nullfolge* $:\Leftrightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

(iii) *diverergent* $:\Leftrightarrow\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent

(iv) *beschränkt* $:\Leftrightarrow$ Menge der Folgenglieder $\{z \in \mathbb{K} |\ \exists k \in \mathbb{N} :\ z = a_k\}$ ist beschränkt

Beispiel 3.1.2. (i) Für a_k ist $a_k := a$, $k \in \mathbb{N}$ beschränkt (z.B. durch $|a|$) und konvergent, denn für $\varepsilon > 0$ wähle $N := 1\ \Rightarrow\ |a_k - a| = 0 < \varepsilon\ \forall k \geq N$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_k := \frac{1}{k^n}$, $k \in \mathbb{N}$, zu $\varepsilon > 0$ wähle $N(\varepsilon) = 1 + \lceil \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}} \rceil$. Dann gilt $k \geq N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ k > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}\ \Rightarrow\ k^n > \frac{1}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ \varepsilon > \frac{1}{k^n} = |a_k - 0|$, d.h. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge.

(iii) $a_k := k$, $k \in \mathbb{N}$ nicht beschränkt, divergent, d.h. $\forall a \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists k \geq N :$ $|a_k - a| \geq \varepsilon$, denn zu $a \in \mathbb{C}$ wähle $\varepsilon := 1$ und für $N \in \mathbb{N}$ wähle $k := \max\{\lceil |a| \rceil + 1, N\}$. Dann ist $k \geq N$ und $|a_k| = k \geq |a| + 1 = |a| + \varepsilon \qquad (*)$ und insbesondere $|a_k| \geq |a| \qquad (**)$
$\Rightarrow\ |a_k - a| \geq \Big||a_k| - |a|\Big| \underset{(**)}{=} |a_k| - |a| \underset{(*)}{\geq} \varepsilon$

(iv) $a_k := i^k$, $k \in \mathbb{N}$, ist beschränkt aber divergent $\boxed{\text{Bild}}$

Definition 3.1.3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ eine Folge und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $j \mapsto \varphi(j) := k_j$ mit $k < k_{j+1}$. Dann heißt $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} = (a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots)$ *Teilfolge* von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.1.4. *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergent. Dann gilt:*

(i) Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k$ ist eindeutig

(ii) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

(iii) $\forall$ Teilfolgen gilt $\lim\limits_{j\to\infty} a_{k_j} = a$

(iv) $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Re}(a_k) = \mathrm{Re}(a)$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{Im}(a_k) = \mathrm{Im}(a)$

(v) $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = |a|$

Beweis.

(i) Seien $a, b \in \mathbb{K}$ Grenzwerte von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$ beliebig.
$\Rightarrow\ 0 \leq |a-b| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_k - a| + |a_k - b| < 2\varepsilon$ für $k \geq \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$
$\Rightarrow\ 0 \leq |a-b| < 2\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$
$\Rightarrow\ |a-b| = 0 \ \Rightarrow\ a = b$

(ii) $\uparrow$ Übung (inderekt, vgl. Bsp. 3.1.2(ii))

(iii) $\uparrow$ Übung (Definition !)

(iv) $\uparrow$ Übung (Satz 2.3.8 !)

(v) $\uparrow$ Übung (Satz 2.3.8 !)

□

Beispiel 3.1.5. Für $a_k = i^k$, $k \in \mathbb{N}$ und $\varphi_m(j) := 4j + m$ gilt

$$a_{\varphi_m(j)} \to i^m = \begin{cases} 1 & , m = 0 \\ i & , m = 1 \\ -1 & , m = 2 \\ -i & , m = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Bild}}$

$\underset{\text{Prop. 3.1.5}}{\Rightarrow}$ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ divergent (4 Grenzwerte für Teilfolgen).

Satz 3.1.6 (Rechenregeln)**.** *Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ mit $a_k \to a$, $b_k \to b$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha a + \beta b$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k b_k) = ab$

(iii) $b \neq 0 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{b_k} = \dfrac{1}{b}$

Beweis. Sei $M := \max\{|\alpha|, |\beta|, |a|, |b|, \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k, \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} b_k\}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

(i) $|(\alpha a_k + \beta b_k) - (\alpha a + \beta b)| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |\alpha| \underbrace{|a_k - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2M}} < \varepsilon$
für $k \geq N(\varepsilon) := \left\{N_a\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right), N_b\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)\right\}$

(ii) $|a_k b_k - ab| = |a_k b_k - a_k b + a_k b - ab| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |a_k||b_k - b| + |b||a_k - a| \leq \varepsilon$
für $l \leq N(\varepsilon)$ aus (i)

(iii) $b \neq 0 \ \Rightarrow\ |b| > 0 \ \Rightarrow\ |b_k - b| < \min\left\{\frac{1}{2}|b|, \frac{1}{2}\varepsilon|b|^2\right\}$
für $k \geq \tilde{N} := \tilde{N}(\min\left\{\frac{1}{2}|b|, \frac{1}{2}\varepsilon|b|^2\right\})$
$\Rightarrow\ |b| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |b_k| + |b - b_k| < |b_k| + \frac{1}{2}|b|$
d.h. $|b_k| > \frac{1}{2}|b| > 0$ für $k \geq \tilde{N}$ (insbesondere $b_k \neq \tilde{N}$)
$\Rightarrow \left|\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_k|}{|b_k||b|} < \frac{\frac{1}{2}\varepsilon|b|^2}{\frac{1}{2}|b|\cdot|b|} = \varepsilon\ \forall k \geq N$

□

Folgerung 3.1.7. *Für $(s_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$ ist*
$a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{Re}(a) \;\wedge\; \mathrm{Im}(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathrm{Im}(a)$
Insbesondere ist der Grenzwert reeller Folgen reell.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Prop. 3.1.4 (iv)
„$\Leftarrow$ “: Satz 3.1.6 (i) und $\alpha = 1$, $\beta = i$ □

Beispiel 3.1.8. Für $a_k := \dfrac{4k^2+2k-5}{2k^2-k+2}$, $k \in \mathbb{N}$ ist
$$a_k = \frac{4+\frac{2}{k}-\frac{5}{k^2}}{2-\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{4+2\cdot 0-5\cdot 0}{2-0+2\cdot 0} = \frac{4}{2} = 2$$

Proposition 3.1.9 (Nullfolgen)**.** *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ Folgen und $a \in \mathbb{K}$. Dann*

(i) $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a \;\Leftrightarrow\; (a_k - a)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge*

(ii) $|a_k - a| \leq |b_k| \quad \forall k \geq k_0 \in \mathbb{N}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge* $\Rightarrow\; a_k \to a$

(iii) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt,* $(b_K)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge* $\Rightarrow\; (a_kb_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge*

Beweis. $\uparrow$ Übung ((i)+(ii): Def. ,(ii): $|a_kb_k| \leq A|b_k - 0|$) □

Beispiel 3.1.10. Zeigen $a_n := \sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
OBdA $n \geq 2 =: k_0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{n} \geq 1$ und
$$n = \left(1 + (\sqrt[n]{n}-1)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sqrt[n]{n}-)^k \geq \binom{n}{2} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^2$$
$\Rightarrow\; |\sqrt[n]{n}-1| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} =: b_n$, $b_1 := 1$
Wegen $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ für $n > \lceil \frac{2}{\varepsilon^2} \rceil + 1$ ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\underset{\text{Prop 3.1.9(ii)}}{\Rightarrow}$ $a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$

Definition 3.1.11. $a \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungswert/ Verdichtungspunkt* der Teilfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \;:\Leftrightarrow\; \exists$ Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} a$.

Proposition 3.1.12. *Seien $a \in \mathbb{K}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{K}}$. Dann gilt*

(i) a Häufungswert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $\;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 : \;|\{k \in \mathbb{N} |\; a_k \in U_\varepsilon(a)\}| = \infty$

(ii) $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_k \;\Rightarrow\;$ *a einziger Häufungswert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$*

(iii) a Häufungspunkt von $\{x \in \mathbb{K} |\; \exists k \in \mathbb{N} : \; x = a_k\}$ $\;\Rightarrow\;$ *a Häufungswert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$*

Beweis.

(i) „$\Rightarrow$“: a Häufungswert $\Rightarrow\; \exists$ Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} : \; a_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$
$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall j \geq N;\; \underbrace{|a_{k_j} - a|}_{\Leftrightarrow a_{k_j} \in U_\varepsilon(a)} < \varepsilon$

„$\Leftarrow$“: setze $k_1 := 1$, $k_{j+1} := \min\{k > k_j | a_k \in U_{\frac{1}{j}}(a)\}$
$\forall\varepsilon > 0\, \exists N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil\, \forall j \geq N : \; |a_{k_{j+1}} - a| < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$

(ii) $a_k \xrightarrow{k\to\infty} a \underset{\text{Prop. 3.1.4}}{\Rightarrow} \forall$ Teilfolgen : $a_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$

(iii) Def.!

□

Beispiel 3.1.13. $a_k := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{k} & , \; k \text{ gerade} \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{array} \right\}$, $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Häufungswert: 0, 1 wegen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$
Häufungspunkt: 0, da $\{x \in \mathbb{R} |\; \exists k \in \mathbb{N} : x = a_k\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

3.2 Reelle Folgen

Hier zusätzliche Anordnung auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nutzbar.

Proposition 3.2.1. *Für $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ und $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} b$ mit $a_k \leq b_k\ \forall k \geq k_0 \in \mathbb{N}$ gilt $a \leq b$.*

Beweis. <u>Annahme</u>: $a > b$
$\Rightarrow\ \varepsilon := \frac{1}{2}(a-b) > 0$
$\Rightarrow\ |a_k - a| < \varepsilon$ und $|b_k - b| < \varepsilon$ für $k \geq N(\varepsilon)$
$\Rightarrow$ Für $k \geq \max\{k_0, N(\varepsilon)\}$ gilt dann
$0 \leq b_k - a_k = \underbrace{b_k - b}_{<\varepsilon} + \underbrace{a - a_k}_{<\varepsilon} + \underbrace{b - a}_{=-2\varepsilon} < 0$ ↯ □

Satz 3.2.2 (Sandwichsatz). *Seien $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$, $c_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k \leq b_k \leq c_k\ \forall k \geq k_0$. Dann ist $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$*

Beweis.

$$\begin{aligned} |b_k - x| &\leq |b_k - a_k| + |a_k - x| \\ &\leq |c_k - a_k| + |a_k - x| \\ &\leq (|c_k - x| + |a_k - x|) + |a_k - x| < \varepsilon \end{aligned}$$

für $k \geq \max\left\{N_a\left(\frac{\varepsilon}{3}\right), N_c\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)\right\}$ □

Beispiel 3.2.3. Für $x, y \geq$: $b_k = \sqrt[k]{x^k + y^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \max\{x,y\}$, denn

$$\underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ \max\{x,y\}}}{a_k} := \max\{x,y\} \leq \sqrt[k]{x^k+y^k} \leq \underset{\substack{\downarrow k\to\infty \\ 1\cdot\max\{x,y\}}}{\sqrt[k]{2}\max\{x,y\}} =: c_k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definition 3.2.4. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*)
$\Leftrightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}:\ a_k \underset{(\geq)}{\leq} a_{k+1}$

Lemma 3.2.5. *Jede Folge $(a_k)_{k\in\infty} \subset \mathbb{R}$ sitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. $M := \{N \in \mathbb{N} \mid \forall k > N:\ a_k \geq a_N\}$
Fall $|M| = \infty$:
setze $k_1 := \min M$, $k_{j+1} := \min(M \cap \{N \in \mathbb{N} \mid N > k_j\})$, $j \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ (a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Teilfolge

Fall $|\mathbb{N} \setminus M| = \infty$:
$\mathbb{N} \setminus M = \{N \in \mathbb{N} \mid \exists\, k > N : a_k < a_N\}$
setze $k_1 := \min(\mathbb{N} \setminus M)$, $k_{j+1} := \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > k_j,\ a_k < a_{k_j}\}$
$\Rightarrow\ (a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Teilfolge □

Satz 3.2.6 (Monotoniesatz). *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ monoton wachsend (bzw. fallend) und $W := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{N}:\ x = a_k\}$. Dann ist*
$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Leftrightarrow$ W nach oben (bzw. unten) beschränkt.
Gegebenenfalls ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \sup W$ (bzw. $\inf W$)

Beweis. Fall wachsend (Rest analog)
„$\Rightarrow$“: Proposition 3.1.4 $\Rightarrow$ W beschränkt $\Rightarrow$ W nach oben beschränkt
„$\Leftarrow$“: $\emptyset \neq W \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt
$\underset{\substack{\text{Def. 1.7.8} \\ \text{+HS 1.7.11}}}{\Rightarrow}\ \exists\, s := \sup W \in \mathbb{R}$
Sei $\varepsilon > 0$ $\underset{\text{Satz 1.7.4}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x_\varepsilon \in W:\ s - \varepsilon < x_\varepsilon$

Wähle $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $x_\varepsilon = a_{N(\varepsilon)}$
$\underset{(a_k)_k \text{ mon.}}{\Rightarrow} \quad \forall\, k \geq N(\varepsilon): \ s - \varepsilon < a_k \underset{a_k \in W}{\leq} \sup W = s < s + \varepsilon$
$\Rightarrow \ |a_k - s| < \varepsilon \ \forall\, k \geq N(\varepsilon)$, d.h. $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} s$ $\square$

Beispiel 3.2.7 (Heron-Verfahren). Sei $x > 0$, $a_1 := x$, $a_{k+1} := \frac{1}{2}(a_k + \frac{x}{a_k})$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \ a_k \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{x}$,
denn: $\bullet$)$a_k > 0$ $\quad \bullet$) $a_k^2 - x \geq 0$ $\quad \bullet$) $a_{k+1} - a_k \leq 0$
$\Rightarrow \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend $a_k \geq \sqrt{x}$

$\underset{\text{Satz 3.2.6}}{\Rightarrow} \quad (a_k) \xrightarrow{k\to\infty} a = \inf_{k\in\mathbb{N}} a_k \geq \sqrt{x}$ und $a_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_k + \dfrac{x}{a_k}\right) \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{n}\left(a + \dfrac{x}{a}\right)$
$\Leftrightarrow \quad a = \frac{x}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt{x}$
$\Rightarrow \quad a_k \xrightarrow{k\to\infty} \sqrt{x}$ (Besonderheit: $x \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow \ a_k \in \mathbb{Q}$!)

Unbeschränkte Folgen?

Definition 3.2.8. $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ divergent heißt

(i) *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ (schreibe $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty$)
$:\Leftrightarrow \ \forall C > 0 \ \exists N(C) \in \mathbb{N} \ \forall k \geq N(C): \ a_k > C$

(ii) *bestimmt divergent* gegen $-\infty$
$:\Leftrightarrow \ \lim\limits_{k\to\infty} -a_k$

(iii) *unbestimmt divergent*
$:\Leftrightarrow$ nicht bestimmt divergent

Bemerkung 3.2.9 (Rechenregeln). *Sei* $a_k \xrightarrow{k\to\infty} \pm\infty$, $b_k \xrightarrow{k\to\infty} b$, $c_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$
$\Rightarrow$

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k + b_k) = \pm\infty$

(ii) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k b_k) = \begin{cases} \pm\infty & , \ b > 0 \\ \mp\infty & , \ b < 0 \end{cases}$

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{a_k} = 0$ *und* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{a_k} = \begin{cases} +\infty & , \ a_k > 0 \ \forall k > k_0 \\ -\infty & , \ a_k < 0 \ \forall k > k_0 \end{cases}$

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent*
$\Rightarrow$

(iv) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k + b_k) = \begin{cases} +\infty & , \ \textit{jeweils } +\infty \\ -\infty & , \ \textit{jeweils } -\infty \end{cases}$

(v) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k b_k) = \begin{cases} +\infty & , \ \textit{gleiche Vorzeichen} \\ -\infty & , \ \textit{verschiedene Vorzeichen} \end{cases}$

Ausdrücke „$\dfrac{\infty}{\infty}$“, „$0 \cdot \infty$“, „$\infty - \infty$“, „$\dfrac{0}{0}$“ *nicht erfasst!*

Beispiel 3.2.10. (i) $c_k = \dfrac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ wobei $c_k > 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{c_k} = k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, aber für $\tilde{c}_k = (-1)^k \dfrac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ist $\left(\dfrac{1}{\tilde{c}_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent.

(ii) $a_k = k^2 - k = k(k-1) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ (Umformen kann helfen!)

Bemerkung 3.2.11. *Setzt man*

$$\sup \emptyset := -\infty, \qquad \inf \emptyset := +\infty$$

sowie

$$\sup M := +\infty, \qquad \inf M := -\infty$$

falls $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben bzw. unten beschränkt und lässt $\pm$ in Def. 3.1.11 als uneigentliche Häufungswert zu, so existiert für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ der

(i) Limes superior (oberer Limes)
$\limsup\limits_{k\to\infty} a_k := \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k := \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sup\limits_{n\geq k a_n} \right) \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(ii) Limes inferior (unterer Limes)
$\liminf\limits_{k\to\infty} a_k := \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\inf\limits_{n\geq} a_n \right) \in \overline{\mathbb{R}}$

Man zeigt leicht.

Proposition 3.2.12. *Für $(a_k)_{k\in\infty} \subset \mathbb{R}$ und $a_* := \liminf_{k\to\infty} a_k$, $a^* := \limsup_{k\to\infty} a_k \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:*

(i) a_*, a^* eindeutig bestimmt

(ii) $a_* \leq a^*$

(iii) $a_k \xrightarrow{k\to\infty} a \in \underline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow a^* \leq a_*$
Ggf. ist $a = a^* = a_*$

(iv) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow$ a_*, $a^*\mathbb{R}$

(v) a_* bzw. a^* ist kleinste bzw. größte Häufungswert von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Beispiel 3.2.13. $a_k := \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \frac{2}{k} & , k \text{ gerade} \\ -1 - \frac{2}{k} & , k \text{ ungerade} \end{array} \right\}, \; k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \limsup\limits_{k\to\infty} a_k = 1, \; \liminf\limits_{k\to\infty} a_k = -1$
$\boxed{\text{Bild}}$

3.3 Bolzano-Weierstraß und Cauchy-Kriterium

Hier wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Satz 3.3.1 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ besitzt einen Häufungswert bzw. konvergente Teilfolge.*

Beweis. •) Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \underset{\text{Lem. 3.2.5}}{\Rightarrow} \exists$ Teilfolge $(z_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend (bzw. fallend) $\underset{(z_k)_k \text{ beschr.}}{\Rightarrow}$ $(z_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton wachsend (bzw. fallend) $\underset{\text{Satz 3.2.6}}{\Rightarrow}$ $(z_{k_j})_j$ konvergent ($\underset{\text{Def.}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Häufungswert).

•) Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $|z_k| \geq |\mathrm{Re}(z_k)| \;\Rightarrow\; (\mathrm{Re}(z_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt $\underset{\text{Fall } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $\Big(\mathrm{Re}(z_{k_j})\Big)_{j\in\mathbb{N}}$ $(*)$
Wegen $|z_{k_j}| \geq |\mathrm{Im}(z_{k_j})|$ ist auch $\Big(\mathrm{Im}(z_{k_j})\Big)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt $\underset{\text{Fall } \mathbb{R}}{\Rightarrow}$ $\exists$ konvergente Teilfolge $\Big(\mathrm{Im}(z_{k_{j_l}})\Big)_{l\in\mathbb{N}}$
$(*) \underset{\text{Prop. 3.1.4}}{\Rightarrow} \Big(\mathrm{Re}(z_{k_{j_l}})\Big)_{l\in\mathbb{N}}$ konvergent als Teilfolge von $\Big(\mathrm{Re}(z_{k_j})\Big)_{j\in\mathbb{N}}$
Wegen Folgerung 3.1.7 konvergiert auch $\Big(z_{k_{j_l}}\Big)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ (Teilfoge von $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$)

□

Definition 3.3.2. $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge/Fundamentalfolge*

$$:\Leftrightarrow \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; \forall k, j \geq N(\varepsilon) : |z_k - z_j| < \varepsilon$$

Lemma 3.3.3. *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(i) $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent* $\Rightarrow$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge*

(ii) $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Cauchy-Folge* $\Rightarrow$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*

Beweis. Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Dann gilt:

(i) $z_k \to z \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \; \forall k \geq N : \; |z_k - z| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \; \forall k, j > N : \; |z_k - z_j| \underset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq} \underbrace{|z_k - z|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|z - z_j|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$

(ii) $\exists N(1) \in \mathbb{N} : \; \forall k, j \geq N : \; |z_k - z_j| < 1$
$\Rightarrow \; \forall k \geq N : |z_k| \underset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|z_k - z_N|}_{<1} + |z_N| < 1 + |z_N|$
und für $k \in \{1, \ldots, N\}$ $|z_k| \leq m := \max\{|z_1|, \ldots, |z_k|\}$
$\Rightarrow \; \forall k \in \mathbb{N} : \; |z_k| < 1 + m$

□

Satz 3.3.4 (Cauchy-Kriterium). *Für $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ gilt:*

$$(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{ konvergent } \Leftrightarrow (z_k)_{k\in\mathbb{N}} \textit{Cauchy-Folge}$$

Bemerkung 3.3.5. •) *wie bei Monotoniesatz: Kriterium ohne potentiellen Grenzwert prüfbar*

•) *kann zeigen: Vollständigkeit $\Leftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge konvergiert*

- •) *$\mathbb{R}$ als Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ (vgl. Bsp 3.2.7 mit $x = 2$)*

Beweis. „$\Rightarrow$“: $\uparrow$ Lemma 3.3.3
„$\Leftarrow$“: $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\underset{textLem.}{\Rightarrow}$ $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt
$\underset{\text{Satz 3.3.1}}{\Rightarrow}$ $\exists$ konvergente Teilfolge: $z_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} z \in \mathbb{K}$
D.h: zu $\varepsilon > 0$

- •) $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall j \geq N:\ |z_{k_j} - z| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\qquad (*)$
- •) $\exists\, \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall\, k, l \geq \tilde{N}:\ |z_k - z_l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ $\qquad (**)$

$\Rightarrow\ \forall\, k \geq M := \max\{N, \tilde{N}\}$ gilt
$|z_k - z| \underset{\Delta U}{\leq} \underbrace{|z_k - z_{k_j}|}_{\underset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|z_{k_j} - z_|}_{\underset{(*)}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$
wobei $k_j = l \geq \tilde{N}$ beliebig $\Rightarrow\ z_k \xrightarrow{k\to\infty} z$ □

Beispiel 3.3.6 (Harmonische Reihe)**.** Zeige ($\uparrow$ Übung): $s_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{k} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Beweis. Variation 1) Induktion $\Rightarrow\ \forall\, l \in \mathbb{N}:\ 1 + \dfrac{l}{2} \underset{(*)}{\leq} s_{2^l}\ (\leq l + \dfrac{1}{2})$
Zu $C > 0$ wähle $l \in \mathbb{N}$ mit $l > 2(C-1)$ $\qquad (**)$
und setze $N := 2^l$
$\Rightarrow\ \forall\, n \geq N:\ s_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon. wachs.}}}{\geq} S_N = s_{2^l} \underset{()*}{\geq} 1 + \dfrac{l}{2} \underset{(**)}{>} C$, d.h. $s_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
Variation 2)

a) Divergenz: Satz 3.3.4 $\Rightarrow$ gzz: nicht Cauchyfolge
Für $N \in \mathbb{N}$ ist $|s_{2N} - s_N| = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} =: \varepsilon > 0$,
d.h. $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, k, l \geq N:\ |s_k - s_l| \geq \varepsilon$ (nicht Cauchyfolge)

b) $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$:
$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ monoton wachsend, divergent $\underset{\text{Satz 3.2.6}}{\Rightarrow}$ nicht nach oben beschränkt
$\underset{\text{mon.}}{\Rightarrow}\ \forall C > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ s_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mon.}}}{\geq} s_N > C$

□

3.4 Konvergenz von Reihen

Wieder $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Definition 3.4.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$.

(i) Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, wobei

$$s_1 := a_1 \text{ und } s_{n+1} := s_n + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k,\ n \in \mathbb{N}$$

heißt *Reihe* mit Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

(ii) s_n heißt *n-te Partialsumme* und a_n *n-tes Glied/Summand* von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Weiter heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

(iii) konvergent $:\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert
Ggf. heißt $S := \lim\limits_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{K}$ *Wert* der Reihe schreibe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

(iv) *absolut konvergent* $:\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent

(v) *bedingt konvergent* $:\Leftrightarrow$ konvergent $\wedge$ nicht absolut konvergent

(vi) *divergent* $:\Leftrightarrow$ nicht konvergent

Bemerkung 3.4.2. *Analog* $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ *mit* $m \in \mathbb{Z}$

Beispiel 3.4.3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$, denn

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1 - 0 = 1$$

Satz 3.4.4 (Eulersche Zahl)**.** $e := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} \in (2, 3]$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $e_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ streng monoton wachsend und beschränkt:
$e_0 = 1,\ e_1 = 2$
$2 < e_n = 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k!} \le 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)} = 2 + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\right) \underset{\text{Teleskop}}{=} 2 + 1 - \dfrac{1}{n} \le 3,$
$n \ge 2$
$\underset{\text{Satz 3.2.6}}{\Rightarrow} 2 < e \le 3$ □

Bemerkung 3.4.5. $e \approx 2,71828$

Proposition 3.4.6. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *seien* $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $b_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. *Dann gilt:*

(i) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 2 \le a_n \le e_n < e < b_n \le 4$

(ii) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *streng monoton wachsend,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *streng monoton fallend*

(iii) $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}: \ |e - e_n| \leq \dfrac{2}{(n+1)!}$

(v) $e \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$

1.) $a_n \leq e_n$:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{\text{Satz 2.1.12}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!n^k}$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \displaystyle\underbrace{\prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n}}_{\leq 1 \ (k \text{ Faktoren})} \qquad (*)$$

$$\leq e_n$$

2.) $a_n < a_{n+1}$:

$$l \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \ \Rightarrow \ \frac{n-l}{n} = 11 - \frac{l}{n} < 1 - \frac{l}{n+1} = \frac{n+1-l}{n+1}$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \ a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n+1-l}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!(n+1)^k}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \underset{(*)}{\leq} a_{n+1}$$

3.) $b_n > b_{n+1}$: Wegen $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n(n+2) + 1 \qquad (**)$

$$\text{ist } \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right) \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$
$$\underset{(**)}{=} \frac{n+1}{n+2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}}_{\underset{\text{Satz 2.1.14}}{>} 1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \underset{(**)}{>} 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}} > 1$$

4.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leq e$:

$$2 = a_1 \underset{(2.)}{\leq} a_n < a_n \cdot \left(1 + t\frac{1}{n}\right) \underset{\text{Def.}}{=} b_n \underset{(3.)}{\leq} b_1 = 4$$

$$\underset{\text{Satz 3.2.6}}{\Rightarrow} \ \exists \lim a_n, \ \lim b_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \underset{\text{Def.}b_n}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{n\to\infty} a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{\text{Satz 3.1.6}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\text{Prop 3.2.1 + (1.)}}{\overset{\uparrow}{\leq}} \lim_{n\to\infty} e^n \underset{\text{Satz 3.4.4}}{\overset{\uparrow}{=}} e$$

5.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq e$:
Sei $j \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow e \underset{(2.)+(4.)}{\geq} a_{j+n} \underset{(*)}{=} \textstyle\sum_{k=0}^{j+n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{j+n-l}{j+n}$$
$$\geq \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{j+n}\right) =: x_j^{(n)}$$

mit $(x_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergiert, da monoton wachsend und beschränkt

$$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} a_{j+n} \geq \lim_{j\to\infty} x_j^{(n)} \underset{\text{Satz 3.1.6}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e_n$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \underset{\text{Prop. 3.2.1}}{\overset{\uparrow}{\geq}} \lim_{n\to\infty} e_n \underset{\text{Satz 3.4.4}}{\overset{\uparrow}{=}} e$$

6.) (iv): Sei $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ e_{n+j} - e_n = & \textstyle\sum_{k=n+1}^{n+j} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{n+j} \prod_{l=n+1}^{k} \frac{1}{l}\right) \\
< & \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{n+j} \underbrace{\frac{1}{(k-1)k}}_{=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}\right) \\
= & \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2-1} - \frac{1}{n+j}\right) \\
< & \frac{2}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ |e - e_n| = e - e_n = \lim_{j\to\infty} (e_{n+j} - e_n) \le \frac{2}{(n+1)!}$$

7.) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $2 < e \le b_j < 3$
<u>Annahme</u>: $e \in \mathbb{Q} \ \Rightarrow\ \exists\, p, n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2:\ e = \frac{p}{n}$

$$\underset{(iv)}{\Rightarrow}\ 0 < \frac{p}{n} - e_n \le \frac{2}{(n+1)!}$$

$$\underset{|\cdot n!}{\Rightarrow}\ 0 < \underbrace{p(n-1)!}_{\in\mathbb{N}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} \le \frac{2}{n+1} < 1$$

$$\Rightarrow\ \exists\, z \in \mathbb{Z} \cap (0,1)\ ⚡$$

□

Erste Kriterien/Rechenregeln:

Satz 3.4.7. *Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\Rightarrow$ $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, *insbesondere beschränkt*

(ii) falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* $a_k \ge 0\ \forall k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent } \Leftrightarrow\ s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ beschränkt}$$

(iii) $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $b = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *(konvergent),* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha a + \beta b$$

(iv) $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent* $\Leftrightarrow$ $x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k)$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k)$ *konvergent*
Gegebenenfalls ist $a = x + iy$

Beweis. Grenzwert-Eigenschaften der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$!

(i) $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0$

(ii) $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und Satz 3.2.6

(iii) Satz 3.1.6

(iv) Folgerung 3.1.7

□

Bemerkung 3.4.8. *Bsp. 3.3.6 zeigt:* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Nullfolge nicht hinreichend!*

Beispiel 3.4.9. (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert (später: $\frac{\pi^2}{6}$), denn nach Satz 3.4.7(ii) genügt

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+1)} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \underset{\text{Bsp. 3.4.3}}{\leq} 2$$

(d.h. beschränkt und monoton)

(ii) Für $a > 0$ divergent $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{a^k}$, denn wegen $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{a^{k+1}}}{\frac{k!}{a}} = \frac{k+1}{a} \geq 1 \quad \forall k \geq \lceil a-1 \rceil$

Proposition 3.4.10 (Geometrische Reihe)**.** *Für* $q \in \mathbb{K}$ *gilt:*

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ *falls* $|q| < 1$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *divergent falls* $|q| \geq 1$

Beweis. $q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \;\Leftrightarrow\; |q^k| = ||q^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \;\Leftrightarrow\; |q| < 1$

-) Fall: $|q| \geq 1$: Divergenz (Satz 3.4.7(i))
-) Fall: $|q| < 1$:
  Satz 2.1.12 $\Rightarrow \; s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$

□

3.5 Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 3.5.1 (Cauchy-Kriterium). *Für* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *ist* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent*

$$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq N : \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Beweis. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\underset{\text{Def. 3.4.1}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\underset{\text{Satz 3.3.4}}{\Leftrightarrow}$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\underset{\text{Def. 3.3.2}}{\Leftrightarrow}$ $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq N : \ |s_m - s_n| < \varepsilon$, wobei für $m > n$ (oBdA) $s_m - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k$ □

Folgerung 3.5.2. *Für* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *gilt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent mit } \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1} \infty|a_k| \leq \infty$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k,\ \tilde{s}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. Nach Definition 3.4.1 und Satz 3.5.1 gzz: $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge $\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

Dazu: $0 \leq |s_m - s_n| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k\right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| = \tilde{s}_m - \tilde{s}_n = |\tilde{s}_m - \tilde{s}_n|$

Außerdem: $\forall\, n \in \mathbb{N} :\ |s_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| =: \tilde{s}$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right| =: |s| \underset{\Delta\text{Ungl.}}{\leq} |s - s_n| + |s_n| < |s - s_n| + \tilde{s} \xrightarrow[n\to\infty]{} \tilde{s}$ □

Satz 3.5.3 (Majoranten-Kriterium). *Für* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *und* $c \geq 0$ *gelte*

$$|a_k| \leq c\,|b_k| \qquad \forall k \geq k_0 \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent* $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Beweis. oBdA $k_0 = 1$:

$\Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ s_n := \sum k = 1^n |a_k| \ \leq\ c \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k| =: c\tilde{s}_n, \qquad (*)$

wobei $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

Also: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergent $\underset{\text{Satz 3.4.7}}{\Rightarrow}$ $(\tilde{s}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{(*)}{\Rightarrow}$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\underset{\text{Satz 3.4.7}}{\Rightarrow}$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent □

Bemerkung 3.5.4. *Varianten möglich, z.B. Minoranten-Kriterium als Kontraposition.*

Beispiel 3.5.5. (i) $\uparrow$ Bsp. 3.4.9(i)

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{k^m}}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$:

<u>Fall</u> $m \geq 2n :\ 0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{k^m}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{k^{2n}}} = \frac{1}{k^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Konvergenz wegen Bsp. 3.4.9

<u>Fall</u> $m \leq n :\ \frac{1}{\sqrt[n]{k^m}} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{k^n}} = \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Divergenz wegen Bsp. 3.3.6

Folgerung 3.5.6 (b-adische Zahlendarstellung)**.** *Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt:*

(i) Jedes $x \in \mathbb{R}$ besitzt die Darstellung

$$x = v \cdot \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k}, \text{ mit } v \in \{-1, 1\},\ N \in \mathbb{Z},\ a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \quad \forall k \geq n. \qquad (*)$$

(ii) Jede Reihe $(*)$ konvergiert in $\mathbb{R}$.

Beweis. (ii) $|v a_k b^{-k}| \leq (b-1) \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^k \ \forall\, k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{b}} < \infty$

(Proposition 3.4.10)

$\underset{\text{Satz 3.5.3}}{\Rightarrow}$ $(*)$ absolut konvergent $\underset{\text{Satz 3.5.2}}{\Rightarrow}$ $(*)$ konvergiert

(i) 1. Fall: $1 \leq x < b$,

Setze $r_0 := x,\ r_{k+1} := r_k - b^{-k} \underbrace{\lfloor b^k r_k \rfloor}_{=: a_k \in \mathbb{Z}}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

$\Rightarrow\ b^k r_k - 1 < a_k \leq b^k r_k$

$\Leftrightarrow\ 1 > b^k r_k - a_k \geq 0$

$\Rightarrow\ b^{-k} > \underbrace{r_k - b^{-k} a_k}_{= r_{k+1}} \geq 0$

Also $0 \leq r_k < b^{1-k}\ \forall\, k \in \mathbb{N} - 0$, d.h. insbesondere $r_k \xrightarrow{k \to \infty} 0$ $\qquad (**)$

und $0 \leq a_k \leq b^k r_k < b$

$r_n = x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^{-k}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

$\underset{(**)}{\Rightarrow}\ x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^{-k}$, d.h. $v = 1,\ N = 0$.

2. Fall: $x > 0$,

$N := \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \,|\, b^n \geq \frac{1}{x} \right\} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow\ b^N \geq \frac{1}{x} > b^{N-1}$

$\Rightarrow\ 1 \leq y := b^N x < b$

$\underset{\text{Fall 1.}}{\Rightarrow}\ b^N x = y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^{-k}\ \Rightarrow\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k b^{-k-N} = \sum_{j=N}^{\infty} a_{j-N} b^{-j}$

3. Fall: $x = 0$, setze $v := N := 1,\ a_k := 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$

4. Fall: $x < 0$.

$0 < -x \underset{\text{Fall 2}}{=} \sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k}\ \Rightarrow\ x = -\sum_{k=N}^{\infty} a_k b^{-k}$

□

Bemerkung 3.5.7.

- *Darstellung von $\mathbb{R}$ in Stellenwert-System ↑Bsp. 1.2.6, z.B. Dezimalbruch ($b = 10$), binär ($b = 2$)*

- *$(*)$ i.A. nicht eindeutig:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 9 \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} - 9 \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{Prop. 3.4.10}}}{=} 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 9 = 1,$$

d.h. $0,\overline{9} = 1$

Satz 3.5.8 (Wurzel-Kriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$.

(i) $\exists k_0 \in \mathbb{N}\, \exists q \in (0,1)\, \forall k \geq k_0 : \ \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*

(ii) $\exists$ *Teilfolge* $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\, \forall j \in \mathbb{N} : \ \sqrt[k_j]{|a_{k_1}|} \geq 1 \ \Rightarrow \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent*

Beweis.

(i) $\ldots \ \Rightarrow \ |a_k| \leq q^k \ \forall\, k \geq k_0 \ \Rightarrow$ geometrische Reihe als konvergente Majorante $\underset{\text{Satz 3.5.3}}{\Rightarrow}$ absolut konvergent

(ii) $\ldots \ \Rightarrow \ |a_{k_j}| \geq 1 \ \forall\, j \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ a_k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0 \ \underset{\text{Satz 3.4.7}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

□

Bemerkung 3.5.9. *(i) keine Aussage falls* $\sqrt[k]{|a_k|} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$*:*

Bsp. 3.1.10 $\Rightarrow \ \sqrt[k]{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$
$\Rightarrow$

$$\bullet)\ \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k}\right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,\ \textit{wobei } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \textit{divergiert} \qquad \textit{(Bsp. 3.3.6)}$$

$$\bullet)\ \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^2}\right|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,\ \textit{wobei } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ \textit{absolut konvergiert} \qquad \textit{(Bsp. 3.4.9)}$$

(ii) $\alpha := \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$*. Dann:* $\alpha < 1 \ \Rightarrow$ *Satz 3.5.8 (i)*
$\alpha > 1 \ \Rightarrow$ *Satz 3.5.8 (ii)*

Beispiel 3.5.10. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ konvergiert, denn

$$\sqrt[k]{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} < 1 \qquad \text{(Prop. 3.4.6)}$$

Satz 3.5.11 (Quotienten-Kriterium)**.** *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$.

(i) $\exists k_0 \in \mathbb{N}\, \exists q \in (0,1)\, \forall k \leq k_0 : \ a_k \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*

(ii) $\exists$ *Teilfolge* $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}\, \forall j \in \mathbb{N} : \ a_{k_j} \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{k_{(j+1)}}}{a_{k_j}}\right| \leq 1$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent*

Beweis.

(i) $\forall\, k \geq k_0 : \ |a_{k+1}| = |a_{k_0}| \prod\limits_{l=k_0}^{k} \left|\frac{a_{l+1}}{a_l}\right| \leq |a_{k_0}|^{k-k_0+1} = \underbrace{\frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}}}_{=:b\geq 0} q^{k+1}$

$\Rightarrow$ geometrische Reihe als konvergente Majorante $\Rightarrow$ absolut konvergent

(ii) $\forall\, j \in \mathbb{N} : \ |a_{k_{j+1}}| = |a_{k_1}| \prod\limits_{l=1}^{j} \left|\frac{a_{k_{l+1}}}{a_{k_l}}\right| \geq |a_{k_1}| > 0 \ \Rightarrow \ a_k \underset{k\to\infty}{\not\to} 0 \ \Rightarrow$ divergent

□

Bemerkung 3.5.12. *Auch hier i.A. keine Aussage falls* $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to 1$ *(vgl. Beispiele aus Bem. 3.5.9)*

Beispiel 3.5.13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert (insbesondere $\frac{k!}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!/(k+1)^{k+1}}{k!/k^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right) + = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

Satz 3.5.14 (Leibniz-Kriterium). *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *eine monotone Nullfoge. Dann konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ *und es gilt* $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \le |a_{n+1}|\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis. OBdA sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (sonst $(-a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ betrachten)
$\Rightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N}:\ a_k \ge 0$ und
$\forall\, n \in \mathbb{N}:\ s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \le 0,$
d.h. $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ fallend und analog $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend.
Außerdem beide beschränkt , denn $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$s_1 \le s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1}a_{2n+} \le s_{2n} \le s_2$ (∗)
$\Rightarrow\ \exists\, s := \lim_{n\to\infty} s_{2n},\ t := \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \in \mathbb{R},$
wobei $s - t = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) \underset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nullfoge}}}{=} 0$, d.h. $s = t$

Wegen $\forall\,\varepsilon > 0$ $\bullet)\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge N:\ |s_{2n} - s| < \varepsilon$
$\bullet)\exists\, \tilde{N} \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge \tilde{N}:\ |s_{2n} - s| < \varepsilon$

gilt $\forall\, n \ge \max\{2N,\ 2\tilde{N}+1\}:\ |s_n - s| < \varepsilon$, d.h. $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \xrightarrow{n\to\infty} s$
Wegen $\inf_{n\in\mathbb{N}} s_{2n} = s = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_{2n+1}$ ist außerdem $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

- $\bullet)$ $0 \underset{\inf}{\le} s_{2n} - s \underset{\sup}{\le} s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$, d.h. $|s - s_{2n}| \le a_{2n+1}$
- $\bullet)$ $0 \underset{\sup}{\le} s - s_{2n-1} \underset{\inf}{\le} s_{2n} - s_{2n-1} = a_n$, d.h. $|s - s_{2n-1}| \le a_{2n}$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| = |s - s_n| \le a_{n+1}$$

□

Beispiel 3.5.15. Die alternierende harmonische Reihe konvergiert:
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = s \in \mathbb{R}$ mit $s_2 = \frac{1}{2} \le s \le 1 = s_1$ (später: $s = \ln 2$)
(aber: nicht absolut konvergent ↑ Bsp. 3.3.6)

Bemerkung 3.5.16. ∃ *weitere (unhandliche) Konvergenzkriterien für Reihen.*

3.6 Umordnung und Produkte von Reihen

Proposition 3.6.1 (Umklammern)**.** *Für* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *und* $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge von* $(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *mit* $n_1 := 0$ *sei* $A_j := \sum_{k=n_j+1}^{n(j+1)} a_k,\ j \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} A_j \text{ konvergent und } \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis. (Übung) $\tilde{s}_j := \sum_{l=1}^{j} A_l = \sum_{k=1}^{n_{j+1}} a_k =: s_{n_{j+1}},\ j \in \mathbb{N}$
und mit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert. □

Bemerkung 3.6.2. *(i) möglich: divergent* $\overset{\text{klammern}}{\rightsquigarrow}$ *konvergent*
z.B.: $\underbrace{1-1}_{=0}+\underbrace{1-1}_{=0}+\underbrace{1-1}_{=0}+\ldots = 0$

(ii) nützlich: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ *für* $m \in \mathbb{N}$

Definition 3.6.3. Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion heißt
$(b_k)_{k\in\mathbb{N}} := (a_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *Umordnung von* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Umordnung von* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Satz 3.6.4 (Riemann'scher Umordnungssatz)**.** *Seien* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *und* $\xi \in \mathbb{R}$. *Ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *bedingt konvergent, so existieren Umordnungen, sodass*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \xi \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \text{ divergent.}$$

Satz 3.6.5. *Sei* $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Umordnung von* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent. Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent mit* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, *sowie* $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Beweis.

1.) absolute Konvergenz:
Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(k) \leq m \ \forall\, k \in \{1, \ldots, n\}$
(da $\varphi^{-1}(\{1, \ldots, n\})$ endlich)
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=1}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| := a \in \mathbb{R} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$
$\underset{\text{Satz 3.4.7}}{\Rightarrow} \exists\, b := \sum_{k=1}^{\infty} |a_\varphi(k)| \in \mathbb{R}$, d.h. Umordnung absolut konvergent

2.) $a = b$:
Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \ |a-b| = \left| \sum_{k=1}^{m} |a_k| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_{\varphi(k)}| - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \right| \\ &\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left| \sum_{k=1}^{m} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_{\varphi(k)}| \right| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \ (*) \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Zeigen: Für geeignete n, m ist jeder Term in $(*)$ $\leq \frac{\varepsilon}{4}$
$(\Rightarrow\ 0 \leq |a-b| < \varepsilon \underset{\varepsilon\text{bel.}}{\Rightarrow} a = b)$
Wegen Satz 3.5.1 $\exists\, N = N\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \in \mathbb{N}$, sodass
$\forall\, l > n \geq N: \quad \sum_{k=n+1}^{l} |a_{\varphi(k)}| < \frac{\varepsilon}{4}$

$$\Rightarrow\ \forall\, n \geq N: \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| = \sup_{l>n} \sum_{k=n+1}^{l} |a_{\varphi(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{$**$}$$

$$\text{Analog: } \exists\, M \in \mathbb{N}:\ \forall m \geq M: \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{$***$}$$

Setze nun $n := N$ und wähle $m \geq M$, sodass

$$\varphi(k) \leq m\ \forall\, k \in \{1, \ldots, N\} \text{ (vgl. 1.)} \tag{$****$}$$

$\Rightarrow\ \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und damit
$\{1, \ldots, m\} \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\} \subset \mathbb{N} \setminus \{\varphi(1), \ldots, \varphi(N)\} = \{\varphi(N+1, \ldots)\}$

$$\Rightarrow\ \left| \sum_{k=1}^{m} |a_k| - \sum_{k=1}^{N} |a_{\varphi(k)}| \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

3.) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$:
Wie in $(*)$ gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varepsilon(k)} \right| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \right|}_{=:\mathrm{I}} + \underbrace{\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \right|}_{=:\mathrm{II}} + \underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \right|}_{=:\mathrm{III}}, \text{ wobei}$$

- •) $n \geq N \ \Rightarrow\ mathrmIII \underset{\text{Folg. 3.5.2}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \underset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4}$
- •) $m \geq M \ \Rightarrow\ \mathrm{II} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \underset{(***)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4}$
- •) $n = N,\ m \geq M$ mit $(****)$ $\Rightarrow\ \mathrm{I} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \underset{(**)}{\leq} \frac{\varepsilon}{4}$

$\square$

Definition 3.6.6. Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ und $\Psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$ Bijektion heißt

(i) $(p_l)_{l\in\mathbb{N}}$ mit $p_{\Psi(k,j)} := a_k b_j$, $(k,j) \in \mathbb{N}^2$ *Produktfolge* von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$,$(b_j)_{\in\mathbb{N}}$

(ii) $\sum_{l=1}^{\infty} p_l$ *Produktreihe* von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$

Bemerkung 3.6.7. *Verschiedene Anordnungen Ψ führen auf umgeordnete Produktreihen*

$k \setminus j$	1	2	3	4	$\dots$
1	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	a_1b_4	$\dots$
2	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3		
3	a_3b_1	a_3b_2			
4	a_4b_1				
$\dots$	$\dots$				

•) *diagonal*

•) *rechteckig*

Satz 3.6.8. $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k,\ b = \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ *absolut konvergent in* $\mathbb{K}$

$\Rightarrow$ *Jede Produktreihe ist absolut konvergent mit* $\sum\limits_{l=1}^{\infty} p_l =: p = a \cdot b$

Beweis. Wegen Satz 3.6.5 genügt Aussage für Ψ Rechteck-Anordnung (↑ Bemerkung 3.6.7)

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ \sum_{l=1}^{n} |p_l| &\le\ \textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_k b_j| = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|\right)\\ &\le\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty\end{aligned}$$

$\underset{\text{Satz 3.4.7}}{\Rightarrow}$ absolut konvergent $\Rightarrow\ \exists\, p \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow$ Teilfolge der Partialsumme bezüglich kompletter Rechtecke konvergieren gegen p:

$$p = \lim_{n\to\infty} s_{n^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n^2} p_l = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)\right] = a \cdot b$$

□

Folgerung 3.6.9. *Für absolut konvergente Reihen* $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k,\ b = \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ *konvergiert ihre Cauchy-Produkt* $p = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n-k+1} b_k\right)$ *absolut mit* $p = a \cdot b$.

Beweis. (↑ Übung)

$d_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n-k+1} b_k,\ n \in \mathbb{N},$

entspricht Summe über Diagonale $a_n b_1 \to \dots \to a_1 b_n$ in Bemerkung 3.6.7

$\underset{\text{Satz 3.6.5 + 3.6.8}}{\Rightarrow}$ Behauptung

□

Bemerkung 3.6.10. *(i) analog :* $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{n-k} b_k$ (∗)

falls beide absolut konvergieren.

(ii) Anwendung: $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| < 1$

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)^2 \underset{\textit{Prop. 3.4.10}}{=} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)^2 \underset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

Kapitel IV

Stetige Funktionen

Hier stets $\emptyset \neq X,\ Y \subseteq \mathbb{C}$.

4.1 ε-δ-Definition

Definition 4.1.1. $f : X \to Y$ heißt

(i) stetig in $x_0 \in X \ \Leftrightarrow\ \forall \varepsilon\, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \forall x \in X :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \varepsilon|$

(ii) stetig auf $M \subseteq X\ \ :\Leftrightarrow\ \forall x_0 \in M :\ f$ stetig in x_0

(iii) stetig $:\Leftrightarrow\ f$ stetig auf X

Man setzt $C(X, Y) := \{f |\, f : X \to Y$ stetig auf $X\}$

Bemerkung 4.1.2.

(i) *f unstetig (...auf M, ... in x_0) als logische Negation der Definition*

(ii) *äquivalente Formulierung:*
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta :\ f(X) \cap U_\delta(x_0) \subseteq Y \cap U_\varepsilon(f(x_0))$
insbesondere:

- •) *x_0 isoliert in $X\ \Leftarrow\ f$ stetig in x_0*
- •) *Definition erfordert nur Umgebungsbegriff/Metrik auf X und Y*

(iii) *$C(X)$ bzw. C falls Y bzw. $X,\ Y$ in $C(X, Y)$ klar*

(iv) *Visualisierung für $X, Y \subset \mathbb{R},\ M \subset X$:*
Bild

Beispiel 4.1.3.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{R})\ \Leftarrow\ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Beweis. $x_0 \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Setze $\delta := \dfrac{\varepsilon}{|a| + 1} > 0$

$\Rightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| = |a||x - x_0| \leq \dfrac{|a|}{|a| + 1}\varepsilon < \varepsilon$ $\square$

(ii) $sgn: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, sgn(x) := \left\{\begin{matrix} 1 & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -1 & , x < 0 \end{matrix}\right\}$ unstetig

$\boxed{\text{Bild}}$

denn für $x_0 = 0 \ \exists \varepsilon = 1$, sodass $\forall \delta > 0 \ \exists x = \frac{\delta}{2} \in \mathbb{R}$, mit $|x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ aber $|sgn(x) - sgn(x_0)| = 1 \geq \varepsilon$
(zu $x_0 \in M$, $\varepsilon > 0$ wähle z.B. $\delta = \frac{|x_0|}{2}$)

(iii) $g: \mathbb{R} \to [0,1]$, $g(x) := \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ist nirgends stetig,
denn $g(\mathbb{R} \cap U_\delta(x_0)) = \{0,1\} \ \forall x_0 \in \mathbb{R}, \ \delta > 0$

Abschwächung: Einseitige Stetigkeit (auf $\mathbb{R}$):

Definition 4.1.4. Für $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt $f: X \to Y \subseteq \mathbb{C}$

(i) linksseitig stetig in $x_0 \in X$
$:\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \ \forall x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0]: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(ii) rechtsseitig stetig in $x_0 \in X$
$:\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 \ \forall x \in X \cap (x_0, x_0 + \delta]: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Bemerkung 4.1.5.

(i) analog: „linksseitig stetig auf $M \subseteq X$“usw.

(ii) klar: stetig $\Leftrightarrow$ linksseitig $\wedge$ rechtsseitig stetig

Beispiel 4.1.6. $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, rechtsseitig (nicht linksseitig) stetig auf $\mathbb{Z}$.
$\boxed{\text{bild}}$

4.2 Funktionsgrenzwerte und Eigenschaften

Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$ Häufungspunkt von $X \subseteq \mathbb{K}$ existiert $(x_k)_{k\in N} \subset X \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$. Aussagen über Bildfolgen $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ unter $f : X \to Y \subseteq \mathbb{C}$?

Definition 4.2.1. Für $f : X \to Y$ und x_0 Häufungspunkt von X heißt $y \in \mathbb{C}$ Grenzwert von f für $x \to x_0$
(schreibe $y = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ oder $f(x) \xrightarrow{x\to x_0} y$):$\Leftrightarrow$ $\forall$ Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X\backslash\{x_0\}$ mit $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x_0$ gilt $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} y$.

Bemerkung 4.2.2.

(i) Verallgemeinerung auf

a) isolierte Punkte $x_0 \in X :\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) := f(x_0)$

b) uneigentliche Häufungspunkte bzw. Grenzwerte:

- •) $x_0 \in \{\pm\infty\}$ *zusätzlich zugelassen falls* $X \subseteq \mathbb{R}$
- •) $y \in \{\pm\infty\}$ *zusätzlich zugelassen falls* $Y \subseteq \mathbb{R}$

c) einseitige Grenzwerte falls $X \subseteq \mathbb{R},\ x_0$ *Häufungspunkt:*

- •) $y = \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)\ \ :\Leftrightarrow\ \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X \cap (-\infty, x_0) \ldots$
- •) $y = \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)\ \ :\Leftrightarrow\ \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X \cap (-\infty, x_0) \ldots$

(ii) vergleiche Def. 2.1.7 (Folge = spez. Funktion) + Prop. 3.1.4 (iii) (alle Teilfolgen konvergieren)

Beispiel 4.2.3. (i) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax + b$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & f(x) \xrightarrow{x\downarrow -1} -a + b \\
& f(x) \xrightarrow{x\to 0} b \\
& f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \begin{cases} +\infty & , a > 0 \\ b & , a = 0 \\ -\infty & , a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Bild}}$

(ii) $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\downarrow 0} sgn(x) = 1,\ \lim\limits_{x\uparrow 0} sgn(x) = -1,\ \nexists \lim\limits_{x\to 0} sgn(x)$

Satz 4.2.4 (Folgenstetigkeit)**.** *Für* $f : X \to Y$ *und* $x_0 \in X$ *gilt:*
f *stetig in* $x_0 \ \Leftrightarrow\ f$ *folgenstetig in* x_0*, d.h.* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ mit $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ $\hfill (*)$
<u>Zu zeigen</u>: $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$
Sei $\varepsilon > 0$.

- •) f stetig in $x_0\ \Rightarrow\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0)\ \forall\, x \in X :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- •) $(*)\ \Rightarrow\ \exists\, N = N(\delta) = N(\delta(\varepsilon, x_0)) \in \mathbb{N}\ \forall k \geq N :\ |x_k - x_0| < \delta$
  $\Rightarrow\ \forall\, k \geq N :\ |f(x_k) - f(x_0)| < \varepsilon$, d.h. $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$

„$\Leftarrow$“: Annahme: f unstetig in x_0
$\Rightarrow\ \exists\,\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists\,x_\delta\in X\setminus\{x_0\}$ mit $|x_\delta-x_0|<\delta$ und $|f(x_\delta)-f(x_0)|\geq\varepsilon$
Für $k\in\mathbb{N}$ wähle $\delta_k:=\dfrac{1}{k}$
$\Rightarrow\ \exists\,(x_{\delta_k})_{k\in\mathbb{N}}\subset X\setminus\{x_0\}$ mit $0\leq|x_{\delta_k}-x_0|<\frac{1}{k}\to 0$, d.h. $x_{\delta_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}x_0$
aber $|f(x_{\delta_k})-f(x_0)|\geq\varepsilon$, d.h. $f(x_{\delta_k})\underset{k\to\infty}{\not\to}f(x_0)$ ↯

□

Bemerkung 4.2.5.

(i) *Für $X\subseteq\mathbb{R}$ gilt Analog von Satz 4.2.4 für einseitige Stetigkeit ($\rightsquigarrow$ Klassifikation von Unstetigkeiten)*

(ii) *$f: X\to Y$ heißt stetig fortsetzbar in $x_0\in\mathbb{C}\setminus X$*

$$:\Leftrightarrow\ \exists y\in\mathbb{C},\ \text{sodass}\ g: X\cup\{x_0\}\to Y\cup\{y\},\ x\mapsto g(x):=\begin{Bmatrix} f(x) & , x\in X \\ y & , x=x_0\end{Bmatrix}$$

stetig in x_0
Ggf. gilt x_0 Häufungspunkt von X $\underset{\text{Satz 4.2.4}}{\Rightarrow}$ y eindeutig.

Beispiel 4.2.6. $g: (-1,1)\setminus\{0\},\ x\mapsto g(x):=\frac{1}{x}$ $\boxed{\text{Bild}}$

- •) stetig fortsetzbar in $x_0=1$ $(y=1)$, x_0' $(y\in\mathbb{C}$ bel.)
- •) nicht stetig fortsetzbar in x_0'', da $\lim\limits_{x\uparrow 0}g(x)\neq\lim\limits_{x\downarrow 0}g(x)$

Bemerkung 4.2.7. *Die Rechenregeln aus Satz 3.1.6 und Bemerkung 3.2.9 übertragen sich direkt auf (einseitige) Funktionsgrenzwerte, z.B. $a=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$; $b=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha a+\beta b$*

Satz 4.2.8. *Für $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ und $\mathbb{K}$-wertige Funktionen f,g mit $\emptyset\neq D:=D_f\cap D_g\subseteq\mathbb{C}$ sind*

$$(\alpha f+\beta g): D\to\mathbb{K}:\ (\alpha f+\beta g)(x):=\alpha f(x)+\beta g(x)$$
$$(fg): D\to\mathbb{K}:\ (fg)(x):=f(x)g(x)$$

wohldefiniert. Sind stetig in $x_0\in D$ sofern f und g dort stetig sind.

Beweis. Satz 4.2.4 + Bemerkung 4.2.7. □

Satz 4.2.9. *Ist $f: X\to Y$ stetig in $x_0\in X$ und $g: Y\to Z\subseteq\mathbb{C}$ stetig in $y_0:=f(x_0)$, so ist $(g\circ f): X\to Z$ stetig in x_0.*

Beweis. ($\uparrow$ Übung)
Verwende Bemerkung 4.1.2:
Sei $\varepsilon>$ $\underset{g\text{ stetig in }f(x_0)}{\Rightarrow}$ $\exists\,\varepsilon'$, sodass $g(Y\cap U_{\varepsilon'}(f(x_0)))\supseteq Z\cap U_\varepsilon(\underbrace{g(f(x_0))}_{=(g\circ f)(x_0)})$ $(*)$

$\underset{f\text{ stetig in }x_0}{\Rightarrow}$ $\exists\,\delta>0:\ f(X\cap U_\delta(x_0))\subseteq Y\cap U_{\varepsilon'}(f(x_0))$ $(**)$

$\underset{(*),(**)}{\Rightarrow}$ $(g\circ f)(X\cap U_\delta(x_0))\subseteq Z\cap U_\varepsilon((g\circ f)(x_0))$ □

Folgerung 4.2.10.

(i) *Für* $f: x \to \mathbb{C}$ *seien*

$$\mathrm{Re}f: X \to \mathbb{R}\ (\mathrm{Re}f)(x) := -\mathrm{Re}(f(x))$$
$$\mathrm{Im}f: X \to \mathbb{R}\ (\mathrm{Im}f)(x) := \mathrm{Im}(f(x))$$

und $x_0 \in X$. *Dann gilt:*

$$f \textit{ stetig in } x_0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}f \textit{ und } \mathrm{Im}f \textit{ stetig in } x_0$$

(ii) $f: X \to \mathbb{K}$ *sie stetig in* $x_0 \in D := X \setminus \{x \in X \mid f(x) = 0\}$
$\Rightarrow \frac{1}{f}: D \to \mathbb{K},\ \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}$ *stetig in* x_0.

(iii) *Polynome* $p: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig*

(iv) *Rationale Funktionen (Quotienten aus Polynomen) sind stetig auf ihrem Definitionsbereich*

Beweis. $\uparrow$ Übung mit Hinweis

(i) Satz 4.2.4 + Folgerung 3.1.7

(ii) Satz 4.2.4

$$\Rightarrow f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x) := c \text{ (konstante Funktion) stetig}$$
$$g: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(x) := x\ (g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}) \text{ stetig}$$

$$\underset{\text{Satz 4.2.8}}{\Rightarrow} \text{Polynom } p \text{ stetig auf } \mathbb{C}$$

(iii) Satz 4.2.4 $\Rightarrow\ g: \mathbb{K} \setminus \{0\} \to \mathbb{K},\ g(x) := \frac{1}{x}$ stetig $\underset{\substack{\text{Satz 4.2.9} \\ f \text{ stetig in } x_0 \in D}}{\Rightarrow} \frac{1}{f} = g \circ f|_D$
stetig in $x_0 \in D$

(iv) $p, q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynome $\underset{(iii)}{\Rightarrow}$ stetig $\underset{(ii)}{\Rightarrow} \frac{1}{q}$ stetig $\underset{\text{Satz 4.2.8}}{\Rightarrow} \frac{p}{q} := p \cdot \frac{1}{q}$

$\square$

4.3 Weitere Stetigkeitsbegriffe

Definition 4.3.1. Für $\emptyset \neq M \subseteq X$ heißt $f: x \to Y$

(i) *Lipschitz-stetig* auf M
$:\Leftrightarrow\ \exists\, L > 0\ \forall\, x, y \in M:\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$

(ii) *gleichmäßig stetig* auf M
$:\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon, M) > 0\, \forall x, y \in M:\ |x - y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bemerkung 4.3.2.

(i) L heißt Lipschits-Konstante (f Kontraktion $:\Leftrightarrow$ Lipschitz mit $L < 1$)

(ii) gleiches δ für <u>jedes</u> $y \in M$

(iii) weitere Begriffe:

- *Lipschitz/ gleichmäßig stetig (d.h. auf ganz X)*
- *lokal Lipschitz in $x_0 \in X$*
- *α-Hölder stetig (... auf M, ... in x_0)*

Satz 4.3.3. *Für $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $f: X \to Y$ gilt:*

(i) f Lipschitz-stetig auf M $\Rightarrow$ f gleichmäßig stetig auf M

(ii) f gleichmäßig stetig auf M $\Rightarrow$ f stetig auf M

Beweis. $\uparrow$ Übung

(i) Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{L}$

(ii) offensichtlich f stetig in x_0 $(=: y)$ beliebig fix

$\square$

Beispiel 4.3.4.

(i) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(x) := |x|$ Lipschitz mit $L = 1$, denn
$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \underset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} |x - y|\ \forall x, y \in \mathbb{C}$

(ii) $g: [0, 1] \to \mathbb{R},\ g(x) := \sqrt{x}$

-) nicht Lipschitz, da $\dfrac{|g(x) - g(0)|}{|x - 0|} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} \infty$
-) gleichmäßig stetig (Beweis später)

(iii) $h: (0, 1) \to \mathbb{R},\ h(x) := \dfrac{1}{x}$

-) nicht gleichmäßig stetig, denn $\delta > 0$,
  wähle $j := \left\lceil \dfrac{1}{\delta} \right\rceil \geq \dfrac{1}{\delta}$ und $x_j := \dfrac{1}{j},\ y_j := \dfrac{1}{j+1}$
  $\Rightarrow\ |x_j - y_j| = \dfrac{1}{j(j+1)} < \delta$ aber $|h(x_j) - h(y_j)| \geq 1 =: \varepsilon$
-) stetig ($\uparrow$ Beweis Folgerung 4.2.10)

4.4 Kompaktheit

Definition 4.4.1. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ heißt $M \subseteq \mathbb{K}$ *(folgen-) kompakt* $:\Leftrightarrow$ Jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ besitzt einen Häufungswert in M.

Bemerkung 4.4.2.

- *) $\ldots \Leftrightarrow$ $\exists$ konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M*
- *) weiterer Begriff: Überdeckungskompakt*

Satz 4.4.3 (Heine-Borel). *Für $M \subseteq \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gilt:*

$$M \text{ kompakt} \Leftrightarrow M \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

Beweis. OBdA $M \neq \emptyset$
„$\Rightarrow$“:

1.) beschränkt:
Annahme: M unbeschränkt $\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, a_k \in M : \ |a_k| > k$
$\Rightarrow$ Jede Teilfolge von $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ divergent $\lightning$

2.) abgeschlossen:
Sei x Häufungspunkt von $M \Rightarrow \exists\, (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M : \ a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$
$\underset{\text{kompakt}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Häufungswert $a \in M$, d.h. $\exists$ Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset M : \ a_{k_j} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$
$\underset{\text{Prop. 3.1.4}}{\Rightarrow} x = a \Rightarrow x \in M \underset{\text{Prop. 2.4.2}}{\Rightarrow} M$ abgeschlossen

„$\Leftarrow$“: Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M \underset{\substack{M \text{ beschr.} \\ Satz 3.3.1}}{\Rightarrow} \exists$ Häufungswert $a \in \mathbb{K}$ von $(a_k)_{k\in\mathbb{K}}$
$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(a_{k_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset M : \ a_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} a \Rightarrow a$ Häufungspunkt von M
$\underset{\substack{\text{abg.} \\ \text{Prop. 2.4.2}}}{\Rightarrow} a \in M$ □

Stetigkeit überträgt Kompaktheit:

Satz 4.4.4. *$\emptyset \neq M \subseteq X$ kompakt, $f : X \to Y$ stetig auf $M \Rightarrow f(M)$ kompakt (insbesondere beschränkt!).*

Beweis. $\uparrow$ Übung

-) Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset f(M)$
$\Rightarrow \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $y_k = f(x_k)\ \forall\, k \in \mathbb{N}$
$\underset{M \text{ komp.}}{\Rightarrow} \exists$ Häufungswert $x \in M$, d.h. $\exists$ Teilfolge $x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x$
$\underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} y_{x_{k_j}} = f(x_{k_j}) \xrightarrow[j\to\infty]{} f(x) =: y$
$\underset{x\in M}{\Rightarrow} \exists$ Häufungswert y von $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset f(M)$ in $f(M)$
$\Rightarrow f(M)$ kompakt
-) Insbesondere: $\uparrow$ Satz 4.4.3

□

Beispiel 4.4.5. $f:\,[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x):=\left\{\begin{matrix}\frac{1}{x} & ,\ x>0\\ -1 & ,\ x=0\end{matrix}\right\}$ stetig auf

$M_1=[1,2]$	$M_2=[1,\infty)$	$M_3=(0,2]$
(kompakt)	(nicht beschränkt)	(nicht abgeschlossen)
wobei		
$f(M_1)=\left[\frac{1}{2},1\right]$	$f(M_2)=(0,1]$	$f(M_3)=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$
(kompakt)	(nicht abgeschlossen)	(nicht beschränkt)
Bild	Bild	Bild

unstetig auf $M_4=[0,2]$ (kompakt) mit $f(M_4)=\{-1\}\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ (nicht beschränkt). Bild

Folgerung 4.4.6 (Satz vom Minimum und Maximum)**.** $\emptyset\neq M\subseteq X$ *kompakt,*
$f:X\to Y\subseteq\mathbb{R}$ *stetig auf* M
$\Rightarrow\ \exists\, a,b\in M\ \forall\xi\in M:\ f(a)=\min\limits_{x\in M}f(x)\le f(\xi)\le\max\limits_{x\to M}f(x)=f(b).$

Beweis. Zeigen $\exists$ Maximum (Minimum analog):
Satz 4.4.4 $\underset{\substack{f \text{ stetig}\\ M \text{ komp.}}}{\Rightarrow}$ $f(M)$ kompakt $\underset{\text{Bem 4.4.2f}}{\Rightarrow}$ $\emptyset\neq f(M)\subseteq\mathbb{R}$ beschränkt
$\underset{\mathbb{R}\text{ vollst.}}{\Rightarrow}$ $\exists\, s:=\sup f(M)\in\mathbb{R}$
$\underset{\text{Satz 1.7.4}}{\Rightarrow}$ $\exists\,(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset f(M):\ y_k\xrightarrow[k\to\infty]{}s$
$\underset{f(M)\text{ komp.}}{\Rightarrow}$ $s\in f(M)$, d.h. $s=\max f(M)$
$\Rightarrow\ \exists\, b\in M:\ f(b)=s=\max\limits_{x\in M}f(x)\ge f(\xi)\ \forall\,\xi\in M$ □

Lemma 4.4.7. *Seien* $X,Y\subseteq\mathbb{R}$, $x_0\in X$, $y\in\mathbb{R}$ *und* $f:X\to Y$ *stetig in* x_0 *mit* $f(x_0)<y\ \Rightarrow\ \exists\,\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0)\cap X:\ f(x)<y.$
Bild *Analog:*$f(x_0)>0.$

Beweis. $\uparrow$ Übung (mit Hinweis)
f stetig in x_0 $\Rightarrow$ Für $\varepsilon:=y-f(x_0)>0\ \exists\,\delta>0$, sodass
$\forall\, x\in X:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow\forall\, x\in U_\delta(x)\cap X:$

$$\begin{aligned} f(x)&=f(x)-f(x_0)+f(x_0)\\ &\le\underbrace{|f(x)-f(x_0)|}_{<\varepsilon}+f(x_0)<y \end{aligned}$$

□

Satz 4.4.8 (Zwischenwertsatz)**.** *Für* $X,Y\subseteq\mathbb{R}$ *sei* $f:X\to Y$ *stetig auf dem Intervall* $\emptyset\neq I\subseteq X$*. Dann ist* $f(I)$ *ein Intervall.*

Bemerkung 4.4.9.

(i) $f(I)$ *Intervall* $\underset{\text{Def.}}{\Rightarrow}$ *für* $a,b\in I$ *beliebig nimmt* f *auf* I *jeden Wert* y *zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *(mindesten einmal) an.*
Bild

(ii) unbeschränkte/(halb-)offene Intervalle zugelassen!

Beweis. Fall 1: $|I|=1$ oder f konstant auf I $\Rightarrow$ $|f(I)|=1$ $\Rightarrow$ $f(I)$ Intervall

Fall 2: I kompakt (nicht Fall 1)
Mit $a, b \in I$ aus Folgerung 4.4.6 gilt:
$a \neq b,\ f(a) < f(b),\ f(I) \subseteq [f(a), f(b)]$
Sei $a < b$ (Fall $a > b$ analog)
Wegen $f([a,b]) \subseteq f(I) \subseteq [f(a), f(b)]$
gzz: $y \in (f(a), f(b)) \Rightarrow \exists \xi \in (a,b):\ f(\xi) = y$
Zu y setze $M_y := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq y\}$
$\boxed{\text{Bild}}$

$\Rightarrow M_y \neq \emptyset$ (da $a \in M_y$) und $M_y \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt

$\underset{\mathbb{R}\text{ vollst.}}{\Rightarrow} \exists \xi := \sup M_y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \exists (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M_y \subseteq [a,b] \text{ mit } x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \xi \tag{1}$$

$$\underset{[a,b]\text{ komp.}}{\Rightarrow} \xi \in [a,b] \subseteq I \tag{2}$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} f(\xi) \underset{f\text{ stetig auf } I}{=} \lim_{k\to\infty} f(x_k) \underset{x_k \in M_y}{\leq} f(b) \tag{3}$$

$$\text{Insbesondere } \xi \neq b \underset{(2)}{\Rightarrow} \xi < b \tag{4}$$

Annahme: $f(\xi) < y$

$\underset{\text{Lem. 4.4.7}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(\xi) \cap X:\ f(x) < y$

$\underset{(2),(4)}{\Rightarrow} \exists x \in (\xi, b) \subseteq [a,b]:\ f(x) < y$ ↯ zu $\xi = \sup M_y$

$\underset{(3)}{\Rightarrow} f(\xi) = y > f(a)$ insbesondere $\xi \neq a \underset{(2),(4)}{\Rightarrow} \xi \in (a,b)$

Fall 3: I beliebig (nicht Fall 1 oder 2)
seien $\eta, \mu \in f(I),\ y \in \mathbb{R}$ mit $\eta < y < \mu$

$$\text{Zu zeigen: } y \in f(I), \text{ d.h. } \exists \xi \in I:\ y = f(\xi) \tag{5}$$

$\exists x_1, x_2 \in I:\ \eta = f(x_1),\ \mu = f(x_2)$

$$\Rightarrow J := [x_1, x_2] \subseteq I \text{ kompakt} \tag{6}$$

$\underset{\text{Fall 1/2}}{\Rightarrow} f(J)$ Intervall

$\underset{\text{Bem. 4.4.9}}{\Rightarrow} \exists \xi \in J:\ f(x_1) < f(\xi) = y < f(x_2) \underset{(6)}{\Rightarrow} (5)$ □

Satz 4.4.10. *Sei $\emptyset \neq M \subseteq X$ kompakt und $f: X \to Y$ stetig auf M. Dann ist f gleichmäßig stetig auf M.*

Beweis. Annahme: nicht gleichmäßig stetig auf M

$$\underset{\delta=\frac{1}{k}}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists w_k, z_k \in M \text{ mit } |w_k - z_k| < \tfrac{1}{k} \text{ und } |f(w_k) - f(z_k)| \geq \varepsilon \tag{*}$$

$\underset{M\text{ komp.}}{\Rightarrow} \exists$ Teilfolge $(w_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $w_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} w \in M$

$\Rightarrow z_{k_j} \xrightarrow[j\in\infty]{} w$, denn $0 \leq |z_{k_j} - w| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|z_{k_j} - w_{k_j}|}_{<\frac{1}{k_j}} + |w_{k_j} - w| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$

$\underset{f\text{ stetig auf } M}{\Rightarrow} 0 < \varepsilon \underset{(*)}{\leq} |f(w_{k_j}) - f(z_{k_j})| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |f(w_{k_j}) - f(w)| + |f(w) - f(z_{k_j})| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ ↯

$\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig auf M □

4.5 Monotonie

Hier $X, Y \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 4.5.1. Für $\emptyset \neq M \subseteq X$ heißt $f : X \to Y$

(i) (*streng*) *monoton wachsend* auf M
:$\Leftrightarrow$ $\forall\, x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\qquad (f(x_1) < f(x_2))$

(ii) (*streng*) *monoton fallend* auf M
:$\Leftrightarrow$ $\forall\, x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\qquad (f(x_1) > f(x_2))$

(iii) (*streng*) *monoton* auf M :$\Leftrightarrow$ (i) $\vee$ (ii)

Lemma 4.5.2. *$f : X \to Y$ streng monoton $\Rightarrow$ f injektiv.*

Beweis. ($\uparrow$ Übung)
Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$
OBdA $x_1 < x_2$ (sonst Rollentausch)
$\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ falls streng wachsend
$\Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$ □

Satz 4.5.3. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to Y = f(I)$ streng monoton wachsend/fallend auf I. Dann:*

(i) f stetig auf I bis auf höchstens abzählbar viele Sprungstellen

(ii) $\exists\, f^{-1} \in C(f(I), I)$ streng monoton wachsend/fallend

Beweis. OBdA f wachsend (sonst $-f$ betrachten)

1.) $\forall\, x_0 \in I\ \exists \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x),\ \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$
($\Rightarrow$ f stetig in x_0 oder Sprungstelle x_0):
<u>Zeigen</u>: $\exists \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in I$ (Rest analog),
oBdA x_0 nicht linker Randpunkt
$\underset{I \text{ Intervall}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \delta > 0 :\ [x_0 - \delta, x_0] \subseteq I$
Setze $M := \{f(x) |\ x \in I,\ x < x_0\}$ $\Rightarrow$ $M \neq \emptyset$ (z.B. $f(x_0 - \delta) \in M$)
unde nach oben beschränkt (z.B. durch $f(x_0)$, da f monoton wachsend)
$\Rightarrow$ $\exists\, \alpha := \sup M \in [f(x_0), \infty)$
Zu $\varepsilon > 0\ \exists\, y_\varepsilon \in M$ mit $\alpha - \varepsilon < y_\varepsilon$ $\qquad (*)$
$\Rightarrow$ $\exists\, x_\varepsilon \in I$ mit $x_\varepsilon < x_0$ und $y_\varepsilon = f(x_\varepsilon)$
Sei nun $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I \cap (\infty, x_0)$ mit $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$
$\Rightarrow$ $\exists\, k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ x_k \in I \cap (x_\varepsilon, x_0)\ \forall\, k \geq k_0$ $\qquad (**)$
$\Rightarrow$ $\alpha - \varepsilon \underset{(*)}{<} f(x_\varepsilon) \underset{\substack{f \text{ mon.} \\ (**)}}{<} f(x_k) \underset{\substack{\text{Def. } M \\ (**)}}{\leq} \alpha < \alpha + \varepsilon$
$\Rightarrow$ $|f(x_k) - \alpha| < \varepsilon\ \forall k \geq k_0(\varepsilon)$, d.h. $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \alpha$

2.) Sprungstellenmenge $S := \{x_0 \in I \,|\, \lim\limits_{x\uparrow x_0} < \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)\}$ ist abzählbar:
OBdA $S \neq \emptyset$.
Setze $h : S \to \mathbb{Q}$ mit $x_0 \mapsto h(x_0) := \eta \in (\lim_{x\uparrow x_0} f(x), \lim_{x\downarrow x_0} f(x)) \subset \mathbb{Q}$ beliebig
$\Rightarrow$ h streng monoton wachsend auf S, denn
$x_0 < x_1 \Rightarrow$ $h(x_0) < \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\uparrow x_1} f(x) < h(x_1)$
$\underset{\text{Lem. 4.5.2}}{\Rightarrow}$ $\tilde{h} :\ S \to h(S),\ \tilde{h}(x_0) := h(x_0)$ bijektiv, d.h. $S \propto h(S)$, wobwi $h(S) \subseteq \mathbb{Q}$ abzählbar (nach Lemma 1.5.3 + Satz 1.5.6)

3.) f^{-1} stetig auf $f(I)$:
Zeigen:

$\square$

Beispiel 4.5.4 (n-te Wurzel)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f: I := [0, \infty) \to f(I) \subseteq \mathbb{R}, \; f(x) := x^n$
$\Rightarrow$

- f stetig auf I (f Polynom $\underset{\text{Folg.}\textbf{??}}{\Rightarrow}$ stetig auf $\mathbb{C}$)
- f streng monoton wachsend ($0 \leq x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^n < x_2^n$)
- $f(I) = [0, \infty)$ ($\uparrow$ Satz 2.2.9)
  $\underset{\text{Satz 4.5.3}}{\Rightarrow} \exists\, f^{-1} \in C(\underbrace{[0, \infty)}_{=f(I)}, \underbrace{[0, \infty)}_{=I})$ streng monoton wachsend, wobei $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{n}}$
  ($\uparrow$ Satz 2.2.9)
  $\underset{\text{Satz }\textbf{??}}{\Rightarrow} f^{-1}$ gleichmäßig stetig auf $\emptyset \neq M \subseteq [0, \infty)$ kompakt (z.B. $M = [0, 1]$).
  $\boxed{\text{Bild}}$

4.6 Gleichmäßige Konvergenz

Konvergenz von Funktionenfolgen? Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 4.6.1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : X_k \to \mathbb{K}$ wobei $X_k \subseteq \mathbb{C}$, sodass $X := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} X_k \neq \emptyset$. Weiter sei $x_0 \in X$ und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Dann heißt die Funktionenfolge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

(i) *punktweise konvergent* in x_0 $:\Leftrightarrow$ $(f_k(x_0))_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ konvergent

(ii) *punktweise konvergent* auf M $:\Leftrightarrow$ punktweise konvergent $\forall\, x \in M$.
Ggf. heißt $f : M \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x) := \lim\limits_{k \to \infty} f_k(x)$ *Grenzfunktion* von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

(iii) *gleichmäßig konvergent* auf M
$:\Leftrightarrow$ $\exists\, f : M \to \mathbb{K} :\ \lim\limits_{k \to \infty} \sup\limits_{x \in M} |f_k(x) - f(x)| = 0$

Bemerkung 4.6.2.

(i) Unterschied?

- •) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise auf* M
$\Leftrightarrow$ $\exists\, f : M \to \mathbb{K} :\ \sup\limits_{x \in M} \lim\limits_{k \to \infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$
$\Leftrightarrow$ $\exists f : M \to \mathbb{K}\ \forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 :\ |f_k(x) - f(x)|$
- •) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* M
$\Leftrightarrow$ $\exists f : m \to \mathbb{K}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k_1 = k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_1\ \forall x \in M :\ |f_k(x) - f(x)|$

Insbesondere: gleichmäßige Konvergenz $\underset{k_0 := k_1}{\Rightarrow}$ *punktweise Konvergenz*

(ii) Man schreibt $f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ *punktweise oder gleichmäßig konvergent auf* M

Beispiel 4.6.3. Sei $M := [0, 1]$

(i) $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f_k(x) := x^k$ $\boxed{\text{Bild}}$

- •) punktweise konvergent gegen $f(x) := \left\{ \begin{matrix} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{matrix} \right\}$ $(*)$
- •) nicht gleichmäßig konvergent

(ii) $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $g_k(x) := (x(1 - x))^k$ ist gleichmäßig konvergent gegen $g(x) := 0$, denn
$0 \leq \sup\limits_{x \in M} |\,(x(1 - x)) - 0| \leq \frac{1}{4^k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$
$\boxed{\text{Bild}}$

Gleichmäßige Konvergenz überträgt Stetigkeit!

Satz 4.6.4. *Für* $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ *seien* $x_0 \in M$ *und* $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *mit* $f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ *gleichmäßig auf* M*. Dann gilt:*

$$\forall k \geq N :\ f_k \text{ stetig in } x_0 \ \Leftrightarrow\ f \text{ stetig in } x_0$$

Satz 4.6.5 (Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz)**.** *Für Funktionenfolgen* $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *auf* $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* M

(ii) $\forall\varepsilon\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall k,l > N: \ \sup\limits_{x\in M} |f_k(x) - f_l(x)| < \varepsilon$

Bemerkung. Für $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{C}$ sei $C_b(X,\mathbb{K}) := \{d: X \to \mathbb{K} |\ f$ stetig und beschränkt$\}$
$\underset{\text{Satz 4.2.8}}{\Rightarrow}$ $C_b(X,\mathbb{K})$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und man zeigt leicht (N1) - (N4) für
$\|\cdot\|_\infty: \ C_b(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \|f\|_\infty := \sup\limits_{x\to X} |f(x)|$ (Norm)
bzw (D1)-(D4) für
$d: \ C_b(X,\mathbb{K}) \times C_b(X,\mathbb{K}) \to \mathbb{R}, \ (f,g) \mapsto d(f,g) := \|f-g\|_\infty$ (Metrik)

Gleichmäßige Konvergenz $\widehat{=}$ Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty \underset{\text{Satz 4.6.4}}{\Rightarrow} C_b(X,\mathbb{K})$ ist vollständig (jede Cauchyfolge konvergiert).

Satz 4.6.6 (Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen)**.** *Für* $\emptyset \neq M \subseteq X$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Funktionenfolge auf* M *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *sei* $s_n : M \to \mathbb{K}, \ x \mapsto s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Weiter existiere $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *und* $c \geq 0$, *sodass* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut konvergent*
und $|f_k(x)| \leq c|b_k| \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0, \ x \in M$. *Dann konvergiert*

(i) *die Reihe* $s(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ *absolut für jedes* $x \in M$

(ii) *die Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *gleichmäßig auf* M *gegen* $s: M \to \mathbb{K}$

4.7 Potenzreihen und elementare Funktionen

4.7.1 Konvergenzradius von Potenzreihen

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Definition 4.7.1. Für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$ und $z_0 \in \mathbb{K}$ heißt die Abbildung $P : z \mapsto P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ *formale Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt z_0 und Konvergenzradius $R := \sup\{r \geq 0 |\ (a_k r^k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K} \text{ beschränkt}\}$.

Bemerkung 4.7.2.

(i) Für jedes $z \in \mathbb{K}$ ist $P(z)$ eine Reihe im Sinne von Definition 3.4.1 (absolut/bedingt konvergent oder divergent!)

(ii) Ziel: $D_p \subseteq \mathbb{K}$ finden, sodass $P : D_p \to \mathbb{K}$ „schöne Funktion“

(iii) $P(z_0) = a_0$ (absolut konvergent als endliche Reihe!) und $R \in [0, \infty)$

Beispiel 4.7.3. Sei $z_0 = 0$ und

(i) $\mathbb{K} = \mathbb{C},\ a_k = 1\ \forall k \in \mathbb{N}_0$ $\boxed{\text{Bild}}$

$\Rightarrow\ P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ geometrische Reihe

$\Rightarrow\ R = 1$ und $P(z)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $|z| < R$ und $P : \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < R\} \to \mathbb{C}$ stetig (wegen Proposition 3.4.10: $P(z) = \dfrac{1}{1-z}$ für diese z)

(ii) $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ a_k = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ \frac{1}{k} & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\mathbb{R}\ P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k}$

$$\Rightarrow\ R = 1 \text{ und } P(z) \Rightarrow \begin{cases} \text{bedingt konvergent} & , z = -R & \text{(Leibnitz)} \\ \text{absolut konvergent} & , z \in (-R, R) & \text{(geometrische Reihe)} \\ \text{divergent} & , \text{sonst} & \text{(harmonische Reihe)} \end{cases}$$

(iii) $\mathbb{K} = \mathbb{C},\ a_k = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ \frac{1}{k^2} & , k \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\Rightarrow\ P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{z^k}{k^2}$

$$\Rightarrow\ R = 1 \text{ und } P(z) \begin{cases} \text{absolut konvergent} & , |z| \leq R \\ \text{divergent} & , |z| > R \end{cases}$$

(iv) $a_k = \dfrac{1}{k!}\ \Rightarrow\ P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$

Für $z \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ setzt $k_0 := \lceil |z| \rceil \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}} \right| = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{k_0}{k_0+1} =: q \in (0,1) \qquad \forall k \geq k_0$$

$\Rightarrow\ P(z)$ konvergiert absolut ($\uparrow$ Satz 3.5.11) und $R = \infty$

(da $(a_k r^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ Nullfolge $\forall r \geq 0$)

Satz 4.7.4 (Konvergenzverhalten)**.** *Für* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{K}$ *und* $z_0 \in \mathbb{K}$ *sei* $P(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* R*. Dann gilt*

(i) $z \in U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < R\} \;\Rightarrow\; P(z)$ *konvergiert absolut*

(ii) $z \in \mathbb{K} \setminus \overline{U_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| > R\} \;\Rightarrow P(z)$ *divergiert*

(iii) $\tilde{r} \in [0, R) \;\Rightarrow\; P$ *konvergiert gleichmäßig auf* $\overline{U_{\tilde{r}}(z_0)} = \{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| \leq \tilde{r}\}$

Folgerung 4.7.5. *Für* P *aus Satz 4.7.4 gilt* $P : U_R(z_0) \to \mathbb{K}$ *ist stetig.*

Alternative Darstellung des Konvergenzradius:

Satz 4.7.6 (Cauchy-Hadamard)**.** *Für* R *aus Satz 4.7.4 gilt* $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

(mit $\dfrac{1}{\infty} = 0,\ \dfrac{1}{0} = 0$*)*

4.7.2 Exponentialfunktion

Definition 4.7.7. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ heißt (*komplexe*) *Exponentiol-funktion*

Proposition 4.7.8. *Es gilt*

(i) $\exp$ *ist wohldefiniert und stetig*

(ii) $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(1) = e$

(iii) $\forall\, z, w \in \mathbb{C}:\ \exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$
(Insbesondere: $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$*)*
und $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)},\ \exp(\mathrm{Re}(z)) = |\exp(z)|$

(iv) $\exp|_{\mathbb{R}}$ *ist streng monoton wachsend mit* $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$
$\boxed{\textit{Bild}}$

4.7.3 Logarithmus

Definition 4.7.9. $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x) := \exp|_{\mathbb{R}}^{-1}(x)$ heißt *natürlicher Logarithmus.*

Proposition 4.7.10. *Es gilt*

(i) $\ln$ *ist wohldefiniert und stetig*

(ii) $\ln(1) = 0$ *und* $\ln(e) = 1$

(iii) $\forall\ x, y \in (0,\infty) :\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
Insbesondere: $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

(iv) $\ln$ *ist streng monoton wachsend mit* $\ln\left((0,\infty)\right)$

4.7.4 Allgemeine Potenzen, Logarithmen und Exponentialfunktionen

Definition 4.7.11. Für $a > 0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt

(i) $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp_a(z) := e^z := \exp(z \ln(a))$ *Exponentialfunktion* zur Basis a

(ii) $p_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{C},\ x \mapsto p_\alpha(x) := x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$
allgemeine Potenzfunktion mit Exponent α

Proposition 4.7.12. *Seien $a, b > 0,\ \alpha, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(i) $\exp_a$ *und* p_α *aus Definition 4.7.11 sind wohldefiniert und stetig mit* $\exp_a(0) = p_\alpha(1) = 1$

(ii) $a \neq 1 \ \Rightarrow\ \exp_a|_{\mathbb{R}}$ *ist streng monoton* $\left\{ \begin{array}{ll} \textit{wachsend} & , \textit{falls } a > 1 \\ \textit{fallend} & , \textit{falls } a < 1 \end{array} \right\}$
mit $\exp_a(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ *und* $\exp_1(\mathbb{C}) = \{1\}$ $\boxed{\textit{Bild}}$

(iii) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \Rightarrow\ p_\alpha$ *ist streng monoton* $\left\{ \begin{array}{ll} \textit{wachsend} & , \alpha > 0 \\ \textit{fallend} & , \alpha < 0 \end{array} \right\}$
mit $p_\alpha((0, \infty)) = (0, \infty)$ *und* $p_0((0, \infty)) = \{1\}$ $\boxed{\textit{Bild}}$

(iv) $\exp(z) = e^z$, *d.h.* $\exp_e = \exp$

(v) $\ln(a^z) = z \ln(a)$, *falls* $\mathrm{Im}(z) = 0$

(vi) Potenzgesetze: $a^{\alpha+z} = a^\alpha a^z,\ (ab)^z = a^z b^z,\ a^{z\alpha} = (a^z)^\alpha$ *und* $a^{-z} = \dfrac{1}{a^z} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^z$, *falls* $\mathrm{Im}(z) = 0$

Bemerkung 4.7.13.

(i) Nach Satz 4.5.3 gibt es (stetige, monotone) Umkehrfunktion zu $\exp_a|_{\mathbb{R}}$ *mit* $a \neq 1$ *und* p_α *mit* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Proposition 4.7.12 zeigt:*

1.) $(p_\alpha)^{-1} = p_{\frac{1}{\alpha}} : (0, \infty) \to (0, \infty)$, *d.h. wieder Potenzfunktion*

2.) $\log_a := (\exp_a|_{\mathbb{R}})^{-1}$ *(„Logarithmus zur Basis a") ist gegeben durch*
$x \mapsto \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$
(rechne nach, dass $\forall x > 0 :\ \exp_a(\ln_a(x)) = x$ *und* $\forall y \in \mathbb{R} :\ \log_a(\exp_a(y)) = y$*)*

(ii) Logarithmengesetze (z.B. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*) übertragen sich direkt von* $\ln$ *auf* $\log_a$

4.7.5 Winkelfunktionen

Definition 4.7.14.

(i) $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sin(z) := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ heißt *Sinusfunktion*

(ii) $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ heißt *Kosinusfunktion*

Proposition 4.7.15. $\sin,\ \cos$ *sind stetig und für* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) Potenzreihendarstellung
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
(absolut konvergent)

(ii) $\sin(-z) = -\sin(z),\ \cos(-z) = \cos(Z)$

(iii) Eulersche Formel:
$\cos(z) + i\sin(z) = e^{iz}$

(iv) Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$

(v) Additionstheoreme: $\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$
$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

Folgerung 4.7.16. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix})\imath[-1,1],\ \cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix}) \in [-1,1]$.

Lemma 4.7.17.

(i) $\cos|_{[0,2]}$ *streng monoton fallend*

(ii) $\exists!\ x_0 \in (0,2):\ \cos(x_0) = 0$

(iii) $\sin(x_0) = 1$

Definition 4.7.18. $\pi := 2x_0$ (mit x_0 aus Lemma 4.7.17) heißt *Kreiszahl.*

Bemerkung 4.7.19. $\pi \approx 3,14159\ldots$

Satz 4.7.20. *Für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(i) Phasenverschiebung:
$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z)$

(ii) Periodizität von $\exp$*:*
$e^{z+2\pi i} = e^z$

(iii) Periodizität von $\sin,\ \cos$*:*
$\sin(z+2\pi) = \sin(z),\ \cos(z+2\pi) = \cos$

(iv) Nullstellen von $\sin,\ \cos$*:*
$\sin(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}:\ z = k\pi$
$\cos(z) = 0 \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{Z}:\ z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$

(v) $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ *streng monoton wachsend mit* $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$ *und*
$\cos|_{[0,\pi]}$ *streng monoton fallend mit* $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$

Folgerung 4.7.21. *Für $z, w, p \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $|e^z| = 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}(z) = 0$

(ii) $e^z = e^w \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z}\; w = z + 2k\pi i$

(iii) $\exp$ *ist p-periodisch* $\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} :\; p = 2k\pi i$

(iv) $\sin$ *ist p-periodisch* $\Leftrightarrow\; \cos$ *ist p-periodisch* $\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} :\; p = 2k\pi$

(v) Die Abbildung $f : [0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} |\; |Z| = 1\}$ *mit* $\varphi \mapsto f(\varphi) := e^{i\varphi}$ *ist bijektiv*

(vi) $z \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists!\, r > 0\; \exists!\, \varphi \in [0, 2\pi),$ *sodass* $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ *(Polardarstellung)*

(vii) $z \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, x \in \mathbb{R},\; \exists!\, \varphi \in [0, 2\pi),$ *sodass* $z = e^{x+i\varphi}$ *(Exponentialdarstellung)*

(viii) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Bemerkung 4.7.22.

(i) Für Tangens $\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi |\; k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C},\; \tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$
$\boxed{\textit{Bild}}$
und Kotangens $\cot : \mathbb{C} \setminus \{k\pi |\; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C},\; \cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$
$\boxed{\textit{Bild}}$
gibt es ebenfalls geometrische Interpretationen und es gelten entsprechende Stetigkeits-/Periodizitäts-/Monotonie-/Nullstellenaussagen

(ii) Nach Satz 4.5.3 gibt es streng monotone stetige Umkehrfunktionen zu $\sin,\; \cos,\; \tan,\; \cot$ *(Arkus-Funktionen, definiert aus jeweiligen Monotonie-Intervall),*
z.B. $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\boxed{\textit{Bild}}$

(iii) Analog hyperbolische Funktionen
$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\; z \mapsto \sinh(z) := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$
$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\; z \mapsto \cosh(z) := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$
$\tanh,\; \coth$ *mit ähnlichen Eigenschaften und entsprechenden Umkehrfunktionen (Area-Funktionen, definiert auf Monotoni-Intervallen)*
$\boxed{\textit{Bild}}$

Kapitel V

Differentialrechnung

Hier stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in X$ Häufungspunkt (z.B. X offen und/oder Intervall).

5.1 Definition und Beispiele

Definition 5.1.1. $f : X \to \mathbb{K}$ heißt

(i) *differenzierbar* in x_0 $:\Leftrightarrow$ $\exists \alpha := \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{K}$.
Ggf. heißt $f'(x_0) := \dot{f}(x_0) := f^{(1)}(x_0) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) := \alpha$ erst Ableitung von f in x_0.

(ii) *differenzierbar* auf $\emptyset \neq M \subseteq X$ $:\Leftrightarrow$ $\forall \tilde{x} \in M :$ $\tilde{x}$ Häufungspunkt von X und f differenzierbar in $\tilde{x}$

(iii) *differenzierbar* $:\Leftrightarrow$ f differenzierbar auf X

Satz 5.1.2 (Äqivalente Charekterisierung)**.** *Für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f : X \to \mathbb{K}$ sind äquivalent:*

(1.) *f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = \alpha$*

(2.) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha$

(3.) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \alpha$

(4.) $\mathrm{Re}(f)$ *und* $\mathrm{Im}(f)$ *sind differenzierbar in x_0 mit*

$$(\mathrm{Re}(f))'(x_0) = \mathrm{Re}(\alpha), \qquad\qquad (\mathrm{Im}(f))'(x_0) = \mathrm{Im}(\alpha)$$

(5.) $\exists\, L : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *linear mit*

$$\lim_{f \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0$$

Ggf. ist $L(h) = \alpha h$ für all $h \in \mathbb{R}$

(6.) $\exists\, \mathcal{E} : X \to \mathbb{K}$ *stetig in x_0 mit $\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}(x) = 0$, sodass*

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + \mathcal{E}(x)(x - x_0) \qquad \forall x \in X$$

Bemerkung 5.1.3.

(i) $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *heißt Differentialquotient mit Schrittweite* h

(ii) $S_{x_0,h}(x) := f(x_0) + \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0), \qquad x \in X$
affin lineare Funktion (Polynom von Grad ≤ 1*), Gerade durch* $P_0 = (x_0, f(x_0))$ *und* $P_1 = ((x_0+h), f(x_0+h))$ *mit Anstieg* $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *(Sekante), wobei*

$$S_{x_0,h}(x) \xrightarrow[h\to 0]{} T_{x_0}(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \qquad x \in X$$

Gerade durch P_0 *mit Anstieg* $f'(x_0)$ *(Tangente an Graph* G_f *in* P_0*) heißt lineare Approximation an* f *in* x_0
$\boxed{\textit{Bild}}$

(iii) $\mathrm{d}f(x_0) := L : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *aus (5) heißt Differtential von* f *in* x_0 *und man schreibt* $\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)h$

(iv) *analog zu Bemerkung 4.2.2 definiert man einseitige Ableitungen von* f *in* x_0*, z.B*

$$f'_+ := \lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(insbesondere sinnvoll für Randpunkte x_0 *von Intervallen* X*)*

(v) *(5)* $\widehat{=}$ *Definition im allgemeinen Kontext*

(vi) f *differenzierbar auf* $M \subseteq X \ \rightsquigarrow\ f' : M \to \mathbb{K}$ *Abbildung (stetig? differenzierbar?)*

Folgerung 5.1.4. $f : X \to \mathbb{K}$ *differenzierbar in* $x_0 \ \Rightarrow\ f$ *stetig in* x_0

Beispiel 5.1.5.

(i) $f_1(x) := x^n,\ n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f_1' = nx^{n-1}$ dann
$$\frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bew. S.2.3.21}}}{=} \frac{(x-x_0)\sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-1-j}}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-1-j} = nx_0^{n-1}$$
(Polynome stetig)

(ii) $f_2(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},\ x > 0 \ \Rightarrow\ f_2'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, denn
$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \xrightarrow{x\to x_0}$ (da $\sqrt{\cdot}$ stetig

(iii) $f_3(x) := \frac{1}{x} = x^{-1},\ x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ \Rightarrow\ f_3'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
denn $\dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \dfrac{x_0 - x}{(x-x_0)xx_0} \xrightarrow{x\to x_0} -\dfrac{1}{x^2}$
später allgemein: $f(x) = x^\alpha\ (x>0), \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \ \Rightarrow\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

(iv) $f_4(x) = Ce^{\alpha x},\ x \in \mathbb{R},\ C, \alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \ \Rightarrow\ f_n'(x) = \alpha \cdot Ce^{\alpha x}$, denn
$$\frac{Ce^{\alpha(x_0+h)} - C^{\alpha x_0}}{h} = \alpha Ce^{\alpha x_0}\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h}$$
wobei für $0 < |h| < 1$
$$\frac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h} - 1 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha h)^k}{k!}}{\alpha h} - 1 = \alpha h \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\alpha h)^{k-2}}{k!}}_{=:g(h)}$$
mit $|g(h)| \leq \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{k-2}}{(k-2)!} = e^{|\alpha|}$ (absolut konvergent)
d.h. $\left|\dfrac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h} - 1\right| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ also $\dfrac{e^{\alpha h}-1}{\alpha h} \xrightarrow{h\to 0} 1$

(v) $f_5(x) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ f_5'(x) = \cos(x)$ (analog $\cos'(x) = -\sin(x)$), denn
Folgerung 4.7.16 $\Rightarrow$ $\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{ix}) = (\mathrm{Im}(f_4))(x)$ mit $C = 1,\ \alpha = i$
$\underset{\text{Satz 5.1.2}}{\Rightarrow} (\mathrm{Im}(f)_4)'(x) = \mathrm{Im}(f_4'(x)) \underset{\text{(iv)}}{=} \mathrm{Im}(ie^{ix}) \underset{(*)}{=} \mathrm{Re}(e^{ix}) \underset{\substack{(\uparrow \\ \text{Folg.4.7.16})}}{=} \cos(x),$
wobei $(*)$: $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Im}(i(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))) = \mathrm{Im}(-\mathrm{Im}(z) + i\mathrm{Re}(z)) = \mathrm{Re}(z)\ \forall z \in \mathbb{C}$

(vi) $f_6(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{Bild}}$
nicht differenzierbar in x_0, da dort nicht stetig ($\uparrow$ Folgerung 5.1.4)

(vii) $f_7(x) := |x|,\ x \in \mathbb{R}$ $\boxed{\text{Bild}}$
stetig aber nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn
$f_{7,+}'(0) = 1 \neq -1 = f_{7,-}'(0)$, d.h. $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f_7(x) - f_7(0)}{x - 0}$

Definition 5.1.6. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $f: X \to \mathbb{K}$

(i) $(n+1)$-*fach differenzierbar* in x_0

$:\Leftrightarrow\ \exists D \subseteq X : f$ n-fach differenzierbar auf D
$x_0 \in D$ Häufungspunkt
$f^{(n)}$ differenzierbar in x_0

Gegebenenfalls heißt $f^{(n+1)}(x_0) := \dfrac{\mathrm{d}^{n+1} f}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x_0) := \dfrac{\mathrm{d}f^{(n)}}{\mathrm{d}x}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0) \in \mathbb{K}$
$(n+1)$-te Ableitung von f in x_0

(ii) n-*fach stetig differenzierbar* (auf $M \subseteq X$)
$:\Leftrightarrow\ f^{(n)}$ existiert und ist stetig auf X (bzw. auf M)
Gegebenenfalls schreibt man $f \in C^n(X, \mathbb{K})$ (bzw. $f \in C^n(M, \mathbb{K})$)

5.2 Ableitungsregeln

Satz 5.2.1. *Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ differenzierbar in x_0. Dann existiert:*

(i) $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$ *für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
(Linearität der Ableitung)

(ii) $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(Produktregel)

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ *falls* $g(x_0) \neq 0$
(Quotientenregel)

Beispiel 5.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$.

(i) Polynome: $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,\ x \in \mathbb{R} \underset{\substack{\text{Satz ??}(i),\\ \text{Bsp. } 5.1.5(i))}}{\Rightarrow} p'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k k x^{k-1}$

(ii) $F(x) := x^{-n} = \frac{1}{x^n} =: \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\underset{\substack{\text{Satz ??}(iii),\\ \text{Bsp. } 5.1.5(i))}}{\Rightarrow} F'(x) \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot n x^{n-1}}{(x^n)^2} = -n x^{-n-1}$

Satz 5.2.3 (Kettenregel)**.** *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0, $y_0 := f(x_0)$ Häufungpunkt von Y, wobei $f(X) \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}$ und $g : Y \to \mathbb{K}$ differenzierbar in y_0.*
Dann ist $h := (g \circ f) : X \to K$ differenzierbar in x_0 mit $h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Beispiel 5.2.4.

(i) Für $a > 0 :\ h_1(x) := a^x = e^{x \ln(a)},\ x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow\ h_1 = g_1 \circ f_1$ mit $g_1(y) = e^y,\ f_1(x) = x \ln(a)$
$\Rightarrow\ g_1'(y) = e^y,\ f_1'(x) = \ln(a) \underset{\text{Satz } 5.2.3}{\Rightarrow} h_1'(x) = g_1'(f_1(x))f_1'(x) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = \ln(a) a^x$

(ii) $h_2(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{Bild}}$

Fall $x_0 = 0$:
$h_2'(0) = 0$ denn für $x \neq 0$ ist $\frac{h_2(x) - h_2(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$,
wobei $0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$
Fall $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
$h_2(x) = f_2(x) \cdot (G_2 \circ F_2)(x),\ x \neq 0$

mit $f_2(x) = x^2 \ \Rightarrow\ f_2'(x) = 2x$ (vgl. Beispiel 5.1.5)
$G_2(y) = \sin(y) \ \Rightarrow\ G_1'(y) = \cos(y)$
$F_2(x) = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ F_2'(x) = -x^{-2}$

$\Rightarrow$ Für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
h_2'(x_0) &\underset{\text{Satz 5.2.1}}{=} f_2'(x_0)(G_2 \circ F_2)(x_0) + f_2(x_0) \underbrace{(G_2 \circ F_2)'(x_0)}_{\underset{\text{Satz 5.2.3}}{=} G_2'(F_2(x))f_2'(x)} \\
&= 2x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0}\right) + x_0^2 \cos\left(\frac{1}{x_0}\right)(-x_0^{-2}) \\
&= 2x_0 \sin\left(\frac{1}{x_0}\right) - \cos\left(\frac{1}{x_0}\right)
\end{aligned}$$

Insgesamt: h_2 differenzierbar auf $\mathbb{R}$, wobei aber h_2' unstetig in $x_0 = 0$ $\left(\text{da } \nexists \lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$\boxed{\text{Bild}}$

Regeln für höhere Ableitungen?

Folgerung 5.2.5. *Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f; g : X \to \mathbb{K}$ n-fach differenzierbar in x_0. Dann existiert*

(i) $(\lambda f + \mu g)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0) + \mu g^{(n)}(x_0) \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *(Linearität)*

(ii) $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$ *(Leibniz-Regel)*

Bemerkung 5.2.6. *Es existiert auch eine komplizierte allgemeine Form der Kettenregel (Satz 5.2.3) für $(g \circ f)^{(n)}(x_0),\ n \in \mathbb{N}$: Faà di Bruno-Formel.*

5.3 Monotonie, Mittelwertsatz, Extrema

Satz 5.3.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : X \to \mathbb{R}$ streng monoton. Ist f differenzierbar in x_0, so gilt für die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(X) \to X$*

$$f^{-1} \text{ differenzierbar in } y_0 := f(x_0) \;\Leftrightarrow\; f'(x_0) \neq 0$$

Gegebenenfalls gilt $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Beispiel 5.3.2.

(i) $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ streng wachsend (Proposition 4.7.8) und differenzierbar mit $\exp'(x) = e^x \neq 0$ (Beispiel 5.1.5)
$\underset{\text{Satz 5.3.1}}{\Rightarrow}$ $\ln = \exp^{-1} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\ln'(e^{x_0}) = \dfrac{1}{e^{x_0}} \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$
$\underset{x_0 := \ln y}{\Rightarrow}$ $\ln'(y) = \dfrac{1}{y} \qquad \forall y \in (0,\infty)$

(ii) $f(x) = x^3,\ x \in \mathbb{R}$

- differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$ (Beispiel 5.1.5), d.h. $f'(x_0) \neq 0 \;\Leftrightarrow x_0 \neq 0$
- streng wachsend, denn

$$a < b \;\Rightarrow \begin{cases} a^3 < b^3 & \text{, falls verschiedene Vorzeichen} \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) < 0 & \text{, falls gleiche Vorzeichen} \end{cases}$$

- $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x^{\frac{1}{2}} & , x < 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{Bild}}$

$\overset{\text{Satz 5.3.1}}{\Rightarrow}$ f^{-1} differenzierbar in $x_0 \;\Leftrightarrow\; x_0 \neq 0$
Tatsächlich: $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$

Definition 5.3.3. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ und $x_l \in X$

(i) Dann heißt $f(x_l)$

- (*globales*) *Maximum* von f $:\Leftrightarrow$ $f(x_l) = \max\limits_{x \in X} f(x)$
- *lokales Maximum* von f $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \delta > 0 :\ f(x_l) = \max\limits_{x \in X \cap U_\delta(x_l)} f(x)$

Ggf heißt x_l (*globale*)/*lokale Maximalstelle* von f

(ii) Analog: (*globale*)/*lokale Minima* bzw. *Minimalstelle*

(iii) $f(x_l)$ bzw. x_l heißen (*globale*)/*lokale Extremum* bzw. *Extremstelle* $:\Leftrightarrow$ (*globale*)/*lokale* Maximum oder Minimum in x_l

Proposition 5.3.4. *Sei $x_l \in X$ innere Punkt und lokale Extremstelle von $f : X \to \mathbb{R}$. Existiert $f'(x_l)$, so gilt $f'(x_l) = 0$*

Bemerkung 5.3.5.

(i) globale Extrema sind auch lokale

(ii) Kandidaten für Extremstellen x_l:

- *) Randpunkte*
- *) innere Punkte mit $f'(x_l) = 0$*
- *) innere Punkte $\nexists f'(x_l)$*

Z.B.: $f(x) := \begin{cases} x^3 & , \ -1 \leq x \leq 1 \\ (x-2)^2 & , \ 1 \leq < 4 \end{cases}$

$\boxed{\textit{Bild}}$

$x_0 = -1 \Rightarrow$ *Randpunkt, globales Minimum,* $f'(x_0) > 0$
$x_1 = 0 \quad \Rightarrow$ *innerer Punkt, nicht extremal,* $f'(x_1) = 0$
$x_2 = 1 \quad \Rightarrow$ *innerer Punkt, lokales Maximum,* $\nexists f'(x_2)$
$x_3 = 2 \quad \Rightarrow$ *innerer Punkt, lokales Minimum,* $f'(x_3) = 0 \ \rightarrow$ *Propsition* **??***!*
$x_4 = 3 \quad \Rightarrow$ *Randpunkte, nicht extremal, da f nicht definiert*

Sonstige $x \in (-1, 4)$ innere Punkte, nicht extremal, $\exists f'(x) \neq 0$

Satz 5.3.6 (Rolle)**.** *Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f \in C([a, b])$ differenzierbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$. Dann $\exists \xi \in (a, b) : \ f'(\xi) = 0$*

Allgemeiner:

Satz 5.3.7 (Mittelwertsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.*

(i) $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ *differenzierbar auf (a, b)*
$\Rightarrow \ \exists \xi \in (a, b) : \ f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(ii) $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ *differenzierbar auf (a, b)*
$\Rightarrow \ \exists \xi \in (a, b) : \ f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$
$\boxed{\textit{Bild}}$

Bemerkung 5.3.8.

(i) Satz 5.3.6 = Spezialfall von Satz 5.3.7 (i)

(ii) ξ aus Satz 5.3.6 und Satz 5.3.7 nicht zwingend eindeutig

(iii) Umstellen liefert:
$f(b) = f(a) + f'\underbrace{(a + \eta(b - a))}_{\in(a,b)}$ *für ein $\eta \in (0, 1)$*

bzw.

$\dfrac{f'(\xi)}{g'} = \dfrac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}$ *für ein $\xi \in (a, b)$ falls $g'(x) \neq 0$ auf (a, b)* $\left(\underset{\textit{Rolle}}{\Rightarrow} \ g(b) \neq g(a)\right)$

Kriterium für Konstanz:

Folgerung 5.3.9. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C(I, \mathbb{C})$ differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann gilt:*

$$f'(x) = g'(x) \ \forall x \in \mathring{I} \ \Leftrightarrow \ \exists C \in \mathbb{C} \, \forall x \in I : \ g(x) = f(x) + C \qquad (*)$$

Insbesondere: f konstant auf I $\Leftrightarrow \ \forall x \in \mathring{I} : \ f'(x) = 0$

Bemerkung 5.3.10. *Also legen Ableitungen Funktionen weitestgehend fest!*
Für das Problem:
Für $\alpha, w \in \mathbb{C}$ finde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass

(1) f *differenzierbar mit* $f'(x) = \alpha f(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$

(2) $f(0) = w$

gilt:

$$\begin{aligned} &(1) \;\Leftrightarrow\; (*):\; \exists C \in \mathbb{C} : \forall\, x \in \mathbb{R} :\; f(x) = Ce^{\alpha x} \\ &(1) \wedge (2) \;\Leftrightarrow\; \qquad\qquad \forall\, x \in \mathbb{R} :\; f(x) = we^{\alpha x} \end{aligned}$$

Zusammenhang von Ableitungen und Monotonie:

Folgerung 5.3.11. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$ differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann gilt:*

(i) $\forall\, x \in \mathring{I} :\; f'(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0 \;\Leftrightarrow\;$ *f monoton wachsend (fallend) auf I*

(ii) $\forall\, x \in \mathring{I} :\; f'(x) \underset{(<)}{>} \;\Rightarrow\;$ *f streng monoton wachsend (fallend) auf I*

Bemerkung 5.3.12. *Im Allgemeinen nicht „$\Leftarrow$"in (ii)*
Bsp.: $f(x) := x^3$ streng monoton wachsend auf $I = [-1, 1]$, aber $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

Hinreichende Bedingung für Extrema mittels Ableitungen:

Proposition 5.3.13. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_l \in I$ und $f \in C(I, \mathbb{R})$.*

(i) Existiert $\delta > 0$, sodass
$\forall\, x \in I \cap (x_l - \delta, x_l) :\; \exists f'(x) \underset{(\leq)}{\geq} 0$ *und*
$\forall\, x \in I \cap (x_l, x_l + \delta) :\; \exists f'(x) \underset{(\geq)}{\leq} 0$,
so ist $f(x_l)$ lokales Maximum (Minimum) von f

(ii) Ist f differenzierbar auf I mit $f'(x_l) = 0$ und existiert $f''(x_l) \underset{(>)}{<} 0$, so ist $f(x_l)$ lokales Maximum (Minimum).

Beispiel 5.3.14.

- •) $x_0,\ x_2$ aus Bemerkung 5.3.5 (ii) mit Proposition 5.3.13(i)
- •) $x_3\ x_0,\ x_2$ aus Bemerkung 5.3.5 (ii) mit Proposition 5.3.13(ii)

5.4 Regeln von l'Hospital

Ziel: Mit dem Mittelwertsatz (Satz 5.3.7) bisher unbestimmbare Grenzwerte vom Typ „$\frac{0}{0}$", „$\frac{\infty}{\infty}$", „$0 \cdot \infty$", „$\infty - \infty$", „1^∞" berechnen.

Satz 5.4.1 (l'Hospital für „$\frac{0}{0}$"). *Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $g'(x) \neq 0 \; \forall \, x \in (a, b)$.*

(i) Aus $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = 0$ und $c := \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ folgt $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

(ii) In (i) kann $x \downarrow a$ jeweils durch $x \uparrow b$ oder auch $x \downarrow x_0$, $x \uparrow x_0$, $x \to x_0$ mit $x_0 \in (a, b)$ ersetzt werden

(iii) Teil (i) und (ii) gelten auch falls $a = -\infty$ und/oder $b = \infty$

Beispiel 5.4.2.

(i) Gegebenenfalls Regel mehrfach anwenden, z.B.:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^{-1}(x)}{x^2} \underset{\text{Satz 5.4.1}}{=} \frac{-\sin(x)}{2x} \underset{\text{Satz 5.4.1}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

(ii) Immer Voraussetzung prüfen, denn bspw. für $f(x) := x + 1$, $g(x) := x$ auf $(0, 1)$ gilt $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \underset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} +\infty$, aber $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \underset{x \downarrow 0}{\longrightarrow} 1 \neq \infty$ (da $f(x) \underset{x \to 0}{\not\to} 0$)

(iii) Auch für Folgen nützlich, z.B. ist für $a > 0$: $\lim\limits_{k \to \infty} k(\sqrt[k]{a} - 1) = \ln(a) \qquad (*)$

Satz 5.4.3 (l'Hospital für „$\frac{\infty}{\infty}$"). *Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$*

(i) Aus $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = +\infty$ und $c := \lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ folgt $\lim\limits_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

(ii) Teil (i) gilt auch für $x \uparrow b$ statt $x \downarrow a$, sowie falls $a = -\infty$ und/oder $b = +\infty$

Bemerkung 5.4.4. *In Satz 5.4.3 sind die Fälle*

- *$c = -\infty$ oder $x \to x_0 \in (a, b)$ nicht sinnvoll*
- *$f(x), g(x) \to -\infty$ mit $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ oder verschiedene Vorzeichen mit $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ebenfalls zulässig*

Beispiel 5.4.5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \overset{\substack{\text{Satz 5.4.3} \\ \text{Bsp. 5.3.2}}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha - 1}} = \frac{1}{\alpha} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^\alpha} \qquad (\alpha > 0)$
(Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz)
und analog $\forall k \in \mathbb{N}$:
$$\frac{x^k}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{k x^{k-1}}{e^x} = \ldots = k! \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$
(exp wächst schneller als jedes Polynom)

Bemerkung 5.4.6. *Weitere Typen auf bekannte zurückführen:*

(i) „$\underset{\sim}{0\cdot\infty}$“: $f(x)\cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ $\left(„\dfrac{0}{0}“\right)$

z.B.: $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)x = \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

oder $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ $\left(„\frac{\infty}{\infty}“\right)$

z.B.: $x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$

(ii) „$\underset{\sim}{1^\infty}$“: $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$ *(„e^∞“, wobei $e^{\cdot}$ stetig)*

z.B.: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to\infty]{} e^1 = e$

(iii) „$\underset{\sim}{\infty-\infty}$“: $f(x)-g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ $\left(„\dfrac{0}{0}“\right)$

z.B.: $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \xrightarrow[x\downarrow 0]{} 0$

5.5 Taylor-Polynome und Taylor-Reihe

Bisher allgemein (unter geeigneten Voraussetzungen)

-) $f(x) = f(x_0) + f'(\xi_{x,x_0})(x - x_0)$ (Mittelwertsatz mit $a = x_0;\ b = x$)
  $= p(x) + R(x)$

  wobei p Polynom von Grad 0 mit $p(x_0) = f(x_0)$ und R Rest mit
  $\frac{|R(x)|}{|x - x_0|^0} = |f'(\xi_{x,x_0})| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

-) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \mathcal{E}(x)(x - x_0)$ (Satz 5.1.2)
  $= p(x) + R(x)$

  wobei p Polynom von Grad ≤ 1 mit $p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0)$ und R Rest mit $\frac{|R(x)|}{|x - x_0|^1} = |\mathcal{E}(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, bzw. speziell für $f = \cos,\ x_0 = 0$ ($\uparrow$ (**) in Beweis Lemma 4.7.17)

-) $\cos = p(x) + R(x)$,
  wobei $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ Polynom von Grad ≤ 3 mit
  $p(0) = 1 = \cos(0)$
  $p'(0) = -x|_{x=0} = 0 = -\sin(0) = \cos'(0)$
  $p''(0) = -1 = -\cos(0) = \cos''(0)$
  $p^{(3)}(0) = 0 = \sin(0) = \cos^{(3)}(0)$
  und Rest R mit $0 \leq R(x) \leq \frac{x^4}{24}$ $\quad \forall\, x \in \mathbb{R} :\ |x| \leq 3$,
  d.h. $\frac{|R(x)|}{|x - 0|^3} \leq \frac{|x|}{24} \xrightarrow{x \to 0} 0$

Geht das auch allgemein?

Definition 5.5.1. Sei $f :\ X \to \mathbb{K},\ x_0 \in X$ und $n \in \mathbb{N}_0$

(i) Ist f n-fach differenzierbar in x_0, so heißt

$$(T_{x_0,n}f) :\ X \to \mathbb{K},\ x \mapsto (T_{x_0,n}f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

n-tes Taylor-Polynom von f um x_0

(ii) Ist f beliebig oft differenzierbar in x_0, so heißt

$$(T_{x_0}f) :\ X \to \mathbb{K},\ x \mapsto (T_{x_0}f)(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylor-Reihe von f um x_0

Proposition 5.5.2. *$p = T_{x_0,n}f$ aus Definition 5.5.1(i) ist das eindeutig bestimmte Polynom von Grad höchstens n mit*

$$p^{(j)}(x) = f^{(j)}(x_0) \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\} \qquad (*)$$

Satz 5.5.3 (Taylor mit Lagrange-Restglied)**.** *Für $x,\ x_0 \in X$ mit $x \neq x_0$ sei $I := [\min\{x, x_0\}, \max\{x, x_0\}] \subseteq X$. Für $f :\ X \to \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $f^{(k)} \in C(I, \mathbb{R})$ differenzierbar auf $\mathring{I}$. Dann existiert $\xi \in \mathring{I}$, sodass*

$$(R_{x_0,n}f)(x) := f(x) - (T_{x_0,n}f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Bemerkung 5.5.4.

(i) also

$$f(x) = (T_{x_0,n}f)(x) + (R_{x_0,n}f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

wobei wieder ξ echt zwischen x und x_0 und
$\frac{|(R_{x_0,n}f)(x)|}{|x-x_0|^n} \xrightarrow{x\to x_0} 0$ *falls* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$.
$\rightsquigarrow$ *Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (Satz 5.3.6)*

(ii) Unter ähnlichen Voraussetzungen existieren weiter Restglieddarstellungen (Integralform, Schlömilch, Cauchy, Peano)

(iii) Gute Approximation von f bei x_0 anhand von $f^{(k)}(x_0)$

Satz 5.5.5. *Sei $f : X \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar auf dem Intervall $I \subseteq X$ und seien $x_0, x \in I$. Dann gilt*

$$f(x) = (T_{x_0}f)(x) \;\Leftrightarrow\; |(R_{x_0,n})(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Hinreichend dafür ist $\exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, C > 0\ \exists\, r > |x-x_0|$, sodass $\forall\, k \geq k_0\ \forall\, y \in U_r(x_0) \cap I$ gilt $|f^{(k)}(y)| \leq C\frac{k!}{r^k}$.

Beispiel 5.5.6.

(i) Taylor-Reihen sind Potenz-Reihen und Taylor-Polynome ihre Partialsummen
$f_1(x) := e^x,\ x \in \mathbb{R}$, erfüllt für x_0
$f_1^{(k)}(x_0) = e^{x_0} = 1 \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$
$\Rightarrow (T_{x_0}f_1)(x) \underset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \underset{\text{Def.}}{=} e^x = f_1(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$
analog: $e^x = e^{x-x_0}e^{x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!}(x-x_0)^k = (T_{x_0}f_1)(x)$ für $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig

(ii) Für $f_2(x) := \ln(1+x)$ gilt auf $X = (-1,\infty)$:
$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \qquad (*)$
(Beweis: Induktion)
Mit $x_0 = 0$ folgt aus Satz 5.5.3
$\forall\, x \in (0,1],\ n \in \mathbb{N}\ \exists\, \xi \in (0,x)$, sodass

$$|(R_{x_0,n}f)(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \underset{(*)}{=} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

(außerdem ist wieder $(R_{x_0}f)(0) = f(0) - (T_{0,n}f)(0) = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$)
$\underset{Satz 5.5.5}{\Rightarrow} \ln(1+x) = f(x) = (T_{x_0}f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k}(x-0)^k$
$\underset{\substack{(*)\\ f^{(0)}(0)=\ln(1+0)=0}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \qquad \forall\, x \in I = [0,1]$
(tatsächlich sogar $\forall\, x \in (-1,1]$)
Insbesondere ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ ($\uparrow$ Beispiel 3.5.15)

(iii) Auch wenn $(T_{x_0}f)(x)$ konvergiert muss im Allgemeinem nicht $f(x) = (T_{x_0}f)()x$ gelten!

Betrachte dazu $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_3(x) := \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & , x > 0 \end{cases}$. $\boxed{\text{Bild}}$

Dann ist $f_3^{(k)}(0) = 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}_0$ und damit $(T_0 f_3)(x) = 0$ auf ganz $\mathbb{R}$, aber $f_3(x) > 0\ \forall\, x > 0$.

Literaturhinweise

[1] H. Amann and J. Escher. ***Analysis I***. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. ISBN 978-3-7643-7756-4. 3. Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7643-7756-4.

[2] J. Appell. *Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen: Eine Einführung in die Theorie reeller Funktionen*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-540-88902-1. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-88903-8.

[3] E. Behrends. *Analysis Band 1. Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni. Von Studenten mitentwickelt*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2015. ISBN 978-3-658-07122-6. 6., erweiterte Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-07123-3.

[4] C. Blatter. *Analysis I*, volume 151 of *Heidelberger Taschenbücher*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980. ISBN 978-3-540-08204-0. 3. Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-05709-4.

[5] N. Bourbaki and P. Spain. *Functions of a Real Variable: Elementary Theory*. Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-642-63932-6. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-59315-4.

[6] T. Bröcker. *Analysis, Band 1*. Spektrum Akademischer Verlag, 1999. ISBN 978-3-8602-5417-2. 2. Auflage, http://home.arcor.de/brt22071.

[7] I. N. Bronstein, H. Mühlig, G. Musiol, and K. A. Semendjajew. ***Taschenbuch der Mathematik (Bronstein)***. Europa-Lehrmittel, 2016. ISBN 978-3-8085-5789-1. 10. Auflage.

[8] R. Denk and R. Racke. *Kompendium der Analysis: Ein kompletter Bachelor-Kurs von Reellen Zahlen zu Partiellen Differentialgleichungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011. ISBN 978-3-8348-1565-1. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-8184-7.

[9] M. Ensenbach. *Analysis I*. 2016. Skript zur Vorlesung des Autors im Wintersemester 2014/2015 an der Universität Siegen.

[10] O. Forster. ***Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen***. Grundkurs Mathematik. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2013. ISBN 978-3-658-00316-6. 11., erweiterte Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-00317-3.

[11] H. Heuser. ***Lehrbuch der Analysis. Teil 1***. Mathematische Leitfäden. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009. ISBN 978-3-8348-0777-9. 17. Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-322-96828-9.

[12] S. Hildebrandt. *Analysis 1*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, corrected edition, 2006. ISBN 978-3-540-25368-6. 2., korrigierte Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/3-540-29285-3.

[13] A. W. Knapp. *Basic Real Analysis. Along with a companion volume* Advanced real analysis. Cornerstones. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2005. ISBN 978-0-8176-3250-2. http://dx.doi.org/10.1007/0-8176-4441-5.

[14] K. Königsberger. ***Analysis 1***. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-540-40371-5. 6., durchgesehene Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-18490-1.

[15] G. Merziger, G. Mühlbach, D. Wille, and T. Wirth. ***Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik***. Binomi-Verlag, 2013. ISBN 978-3-923-92336-6. 7. Auflage.

[16] W. Rudin. *Principles of mathematical analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, Auckland, Düsseldorf, 1976. ISBN 0-07-054235-X. 3rd edition.

[17] T. Tao. *Analysis I*, volume 37 of *Texts and Readings in Mathematics*. Springer, Singapore, 2016. ISBN 978-981-10-1789-6. 3rd edition, http://dx.doi.org/10.1007/978-981-10-1789-6.

[18] H. Triebel. *Analysis und mathematische Physik*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989. ISBN 978-3-7643-2250-2. 3., bearbeitete Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-5265-4.

[19] W. Walter. ***Analysis 1***. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004. ISBN 978-3-540-20388-9. 7. Auflage, http://dx.doi.org/10.1007/3-540-35078-0.

… sowie die zugehörigen Übungsbücher/Repetetorien/etc. oder auch (beinahe) jedes andere Lehrbuch, Kompendium oder Skript, welches *Analysis 1* im Titel trägt (ggf. mit Zusätzen wie *für das Lehramt*, *für Physiker*, oder Ähnlichem).