

1. (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay, \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Lösen sie das Anfangswertproblem

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Berechnen sie die Matrixexponentialfunktion $\exp(xA)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und die allgemeine Lösung der DGL.

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL.

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Bestimmen Sie eine maximale Lösung des AWP

$$y' = y^4, \quad y(0) = 1.$$

4. Die Bevölkerung einer Stadt verdopple sich in 50 Jahren. In wieviel Jahren wird sie sich verdreifachen, wenn die Wachstumsrate zur Einwohnerzahl proportional ist.

5. Bestimme ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0, \quad x > 0.$$

(**Tip: Benutze den Ansatz** $z = \sqrt{x}y$)

6. Bestimme für die folgenden Differentialgleichungs-Systeme ein Fundamentalsystem:

- (a)

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} y, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

- (b)

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y.$$

7. Löse die homogene Differentialgleichung

$$y' = (\sin x)y + \sin x, \quad y(0) = 0$$

mit der Formel Variation der Konstanten.