Aufgabe 1

a) Unter welchen Voraussetzungen an die Folge von Regelfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \quad ?$$

Lösungsansatz: f_n muss gleichmäßig gegen f konvergieren.

b) Untersuche die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n|x|}$$

Lösungsansatz: Punktweise Konvergenz in jedem $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 1$ für $x = 0$. Aus der Unstetigkeit der Grenzfunktion folgt, dass f_n nicht glm. konvergiert.

Aufgabe 2

Berechne folgende Integrale:

$$\text{a)} \int_0^{\ln(\pi)} \frac{\cos(e^x)}{e^{-x}}\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\mathrm{d}x$$

Lösungsansatz: a) $-\sin(1)$, b) -0.5.

c) Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq b - a.$$

Lösungsansatz: $e^{-x^2} \leq 1$ benutzen.

Aufgabe 3

a) Zeige die folgenden Ungleichungen:

$$||x^2e^{-x^2}|| \leq 1 \text{ und } ||x^4e^{-x^2}|| \leq 1,$$

mit $||f|| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Lösungsansatz: z.B. lokales Maximum auf $[0, \infty)$ bestimmen und Verhalten für $x \to \infty$ betrachten.

b) Zeige, dass folgendes Integral existiert:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Hinweise: Teile das Integral auf und schätze nach oben ab. Verwende ggf. Aufgabenteil a).

Lösungsansatz: Das Integral umschreiben und aufteilen, danach mit Teil (a) abschätzen:

$$2\int\limits_{0}^{1} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{\infty} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq 2\int\limits_{0}^{1} 1\mathrm{d}x + 2\int\limits_{1}^{\infty} x^{-2}\mathrm{d}x < \infty$$

Aufgabe 4

Überprüfe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Lösungsansatz: Integralkriterium, Fallunterscheidung $\alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$.

Aufgabe 5

a) Was besagt die Regel von L'Hospital?
Mit welchem wichtigen Satz der Analysis wird diese Regel bewiesen?
Lösungsansatz: Verallgemeinerter MWS.

b) Wie lautet die Lagrange-Form für das Restglied $R_{n+1} = f - T_n f$, wobei $T_n f$ die Taylorentwicklung der Funktion f zum Grade n ist?

b) Bestimme $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$

i) mit der Regel von L'Hospital,

ii) mittels Taylorentwicklung von $\sin(x)$ um den Nullpunkt.

Aufgabe 6

a)Warum gilt für $t \in (-1, 1)$ und $x \in (-1, 1)$

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k \mathrm{d}t \quad ?$$

Lösungsansatz: Normale Konvergenz benutzen.
b) Zeige mit Aufgabenteil a) für $x \in (-1, 1)$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x).$$

Lösungsansatz: Beide Integrale in a) ausrechnen + Indexverschiebung.

Aufgabe 7

a) Sei X eine beliebige Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Welche Bedingungen müssen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sein, so dass d eine Metrik auf X definiert?

b) Zeige, dass d_1 eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert:

$$d_1(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Lösungsansatz:

$$
\begin{aligned}
\text{(M1) } x = y &\Leftrightarrow x_k = y_k && \forall k \\
&\Leftrightarrow x_k - y_k = 0 && \forall k \\
&\Leftrightarrow |x_k - y_k| = 0 && \forall k \\
&\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = d_1(x,y) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(M2) } d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| = \sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| = d_1(y,x)
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(M2) } d_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k + z_k - y_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k| \\
&= d_1(x,z) + d_1(z,y)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Zeige, dass die Funktion

$$
f : \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

Zeige weiter:

1. f ist partiell differenzierbar (bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$);
2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind unstetig bei $(0,0)$;
3. f ist nicht differenzierbar bei $(0,0)$.

Bonusaufgabe 9

Zeige, dass folgende Funktion im Punkt (0/0) ein lokales Minimum besitzt.

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Viel Erfolg!