Funktionentheorie, SoSe 11, 1. PT, Fricke

# Klausuraufgaben (Insgesamt: 50 Punkte)

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf das entsprechende Lösungsblatt!

1. Bestimmen Sie, in welchen Punkten die folgenden Funktionen komplex differenzierbar bzw. holomorph sind.

   (a) $f(z) = |z|^2$.

   (b) $f(x + iy) = |x| + i \cdot |y|$.

   *(4+4 Punkte)*

2. Für welche reellen Zahlen $a, b$ ist $u(x, y) = (ax^2 + bx) \cdot y$ Realteil einer holomorphen Funktion? Geben Sie gegebenenfalls den dazugehörigen Imaginärteil an und schreiben die Funktion als $f(z)$. *(8 Punkte)*

3. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{|z-\zeta|=r} \bar{z}\, dz$, wobei $\zeta \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$.

   *Bonusaufgabe:* Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. *(10+2* Punkte)*

4. Es sei $f(z) = \frac{z}{\sin z}$.

   (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und Singularitäten von $f$, sowie deren Ordnung bzw. Typ.
   Kennzeichnen Sie diese Punkte in der Skizze.

   (b) Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe von $f$ im Punkt $\zeta = i$?

   (c) Die Kurve $\gamma$ sei der geschlossene Polygonzug mit den Eckpunkten $-2+i$, $9+i$, $2-3i$, $3+3i$, $7-3i$, $-2+i$.
   Zeichnen Sie diese Kurve in die Skizze ein und berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\, dz$.

   *(5+2+5 Punkte)*

5. (a) Geben Sie drei Kriterien an, die äquivalent zu „holomorph“ sind.

   (b) Eine der folgenden Abbildungen stellt die Höhenlinien von Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion dar. Welche Abbildung ist es? Begründen Sie ihre Antwort. *(6+6 Punkte)*