Bernd Dreseler

Funktionentheorie I

Sommersemester 1991

Vorlesungsmitschrift von J.Breitenbach

Siegen 2002

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Unter der Funktionentheorie versteht man die Analysis einer komplexen Veränderlichen. Der heutige Kanon einer einführenden Vorlesung (wie beispielsweise dieser) besteht aus Ergebnissen, die weitestgehend im Verlauf weniger Jahrzehnte des 19. Jahrunderts entstanden sind und geht vor allem auf die Arbeiten dreier Personen zurück:

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)
Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)
Karl Wilhem Theodor Weierstrass (1815 – 1897)

Dass die Funktionentheorie allerdings zu dieser Zeit ein außerordentlich fruchtbares Forschungsgebiet war, zeigt allein schon, nach wie vielen und welchen Personen die Sätze benannt sind.

Was den Reiz der Funktionentheorie ausmacht, ist neben ihren zahlreichen Verbindungen zu anderen mathematischen Disziplinen (Algebra, Zahlentheorie, Topologie, um nur einige zu nennen) auch die Eleganz ihrer Ergebnisse und Methoden.
So ist eine Funktion, die in einer offenen Umgebung komplex differenzierbar ist, sofort beliebig oft komplex differenzierbar, ja sogar analytisch — etwas, das in der reellen Analysis undenkbar ist.
Unter den Methoden, die die Funktionentheorie bietet, sticht vor allem die Möglichkeit hervor, uneigentliche Integrale rationaler reeller Funktionen mit einem Umweg über $\mathbb{C}$ zu berechnen.

Der Inhalt der Vorlesung sei im Folgenden kurz angerissen: Das einleitende nullte Kapitel zeigt die Unterschiede zwischen reeller und komplexer Interpretation einer Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf.

Kapitel 1 führt den Begriff der komplexen Differentiation und der Holomorphie ein. Dabei gehen wir eigentlich nur davon aus, dass ein Differentialquotient

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

auch über $\mathbb{C}$ Sinn macht. Eine Funktion, für die in einer vollen Umgebung um z_0 dieser Differentialquotient existiert, nennen wir *holomorph*. Wie komplexe Differenzierbarkeit in einem Punkt oder eben Holomorphie reell durch die Komponentenfunktionen $u + iv$ charakterisiert werden kann, ist Gegenstand dieses Kapitels.
Kapitel 2 befasst sich mit Kurvenintegralen. Diese sind der zentrale Bestandteil von CAUCHYs Zugang zur Funktionentheorie und nehmen auch im Verlauf dieser Vorlesung einen breiten Raum ein. Ziel dieses Kapitels ist, die wichtigsten Rechenregeln über sie zu erarbeiten.
Die wesentlichen Ergebnisse finden sich in Kapitel 3:

- der CAUCHYsche Integralsatz, der besagt, dass ein Kurvenintegral einer holomorphen Funktion nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängt,
- die lokale Darstellbarkeit einer holomorphen Funktion durch eine Potenzreihe (was WEIERSTRASS' Zugang zur Funktionentheorie war),
- die lokale Darstellbarkeit durch eine LAURENTreihe

  $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

- das Verhalten in der Nähe von Nullstellen oder isolierten Singularitäten.

Kapitel 4 widmet sich der Frage, wie die gewonnenen Ergebnisse sich übertragen lassen, wenn ein Integrationsweg mehrfach durchlaufen wird.
Eine der wichtigen Folgerungen aus Kapitel 4 ist der Residuensatz, der sich als mächtiges Werkzeug bei der Berechnung von uneigentlichen Integralen oder Reihen herausstellt. Diese Berechnungen werden in Kapitel 5 näher untersucht.
Zum Abschluss geht die Vorlesung auf Umkehrfunktionen ein und zeigt, mit welchen Schwierigkeiten dabei zu rechnen ist.

JENS BREITENBACH

Kapitel 0

Abbildungen $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$

Dieses Kapitel dient der Vorbereitung auf einen der zentralen Begriffe der Funktionentheorie, der komplexen Differenzierbarkeit. Ziel dieser Vorbereitung ist es, einige Zusammenhänge aufzuzeigen zwischen Funktionen von $\mathbb{R}^2$ in sich auf der einen Seite und Funktionen von $\mathbb{C}$ in sich andererseits.

Rufen wir uns zunächst einige Ergebnisse der Analysis der Funktionen zweier reeller Veränderlicher in Erinnerung:
Eine Funktion $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist im reellen Sinne erst einmal lediglich eine $\mathbb{R}^2$–wertige Funktion in zwei Veränderlichen: $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) =: \mathrm{Re}f(x, y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}f(x, y)$.
Mit $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mathrm{dist}((x, y), (x', y')) = \|(x - x', y - y')\|$ wird eine Metrik auf U erzeugt. (U, dist) ist damit ein metrischer Raum, der darüber hinaus vollständig ist, falls U in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.
Wir können also den aus Analysis I bis III bekannten Apparat von Beriffen anwenden, etwa

- Stetigkeit von f in (x_0, y_0) oder auf U,
- partielle Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0), (reelle!) totale Differenzierbarkeit in (x_0, y_0), ebenso den Begriff der stetigen Differenzierbarkeit,
- Analytizität von f, d. h. f_1 und f_2 sind in (x_0, y_0) durch ihre Taylorreihe darstellbar.

Beispiel 0.1

1. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x \cdot y$ oder allgemein:

$$f(x,y) = c_{n,m}x^n y^m + c_{n,m-1}x^n y^{m-1} + \ldots, c_{i,j} \in \mathbb{R};$$

dies ist eine reellwertige Funktion.

2. $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ (Polynom über $\mathbb{C}$). Sind f, g Polynome über $\mathbb{C}$ mit $g(z) \not\equiv 0$, kann man auch $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ betrachten; eine solche Funktion wird üblicherweise als *gebrochen rationale* Funktion bezeichnet.

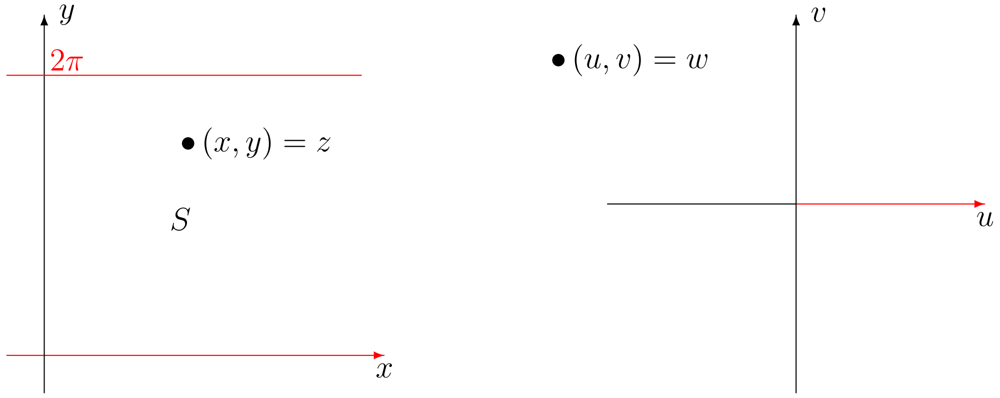
3. Funktionen e^z, $\sin z$, $\cos z$ oder allgemein: analytische Funktionen, d. h. Funktionen, die durch eine Potenzreihe dargestellt werden:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Betrachten wir eine dieser Funktionen etwas näher, nämlich die Exponentialfunktion:

Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$, gilt $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

In y–Richtung ist diese Funktion 2π–periodisch; allerdings ist sie bijektiv von dem Streifen $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}; 0 < y < 2\pi\} = \mathbb{R} \times (0, 2\pi)$ aufs Bild $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0$



Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus, der wohldefiniert ist als Abbildung $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+^0 \to S$.

Die Umkehrbarkeit von Abbildungen und das Objekt der Riemannschen Fläche sind Gegenstand von Kapitel 6.

4. $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, -y)$, oder in komplexer Schreibweise: $z \mapsto \overline{z}$

Um den Graphen einer Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bildlich darzustellen, hat man — anders als bei Funktionen von $\mathbb{R}$ in sich — ein prinzipielles Problem: der Graph ist eine dreidimensionale Fläche im vierdimensionalen Raum, was auf einem zweidimensionalen Blatt Papier nicht einfach zu zeichnen ist. Man zeichnet daher in der Regel Real- und Imaginärteil der Funktion separat.
Nehmen wir als Beispiel die Funktion $f(z) = z^2$ — oder in reeller Schreibweise $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Es sind zwei Arten gebräuchlich, Real- und Imaginärteil zu zeichnen: zum einen als Fläche mittels diagonaler Perspektive, zum anderen als „Draufsicht“ und Darstellung des Funktionsverlaufs durch Niveaulinien.

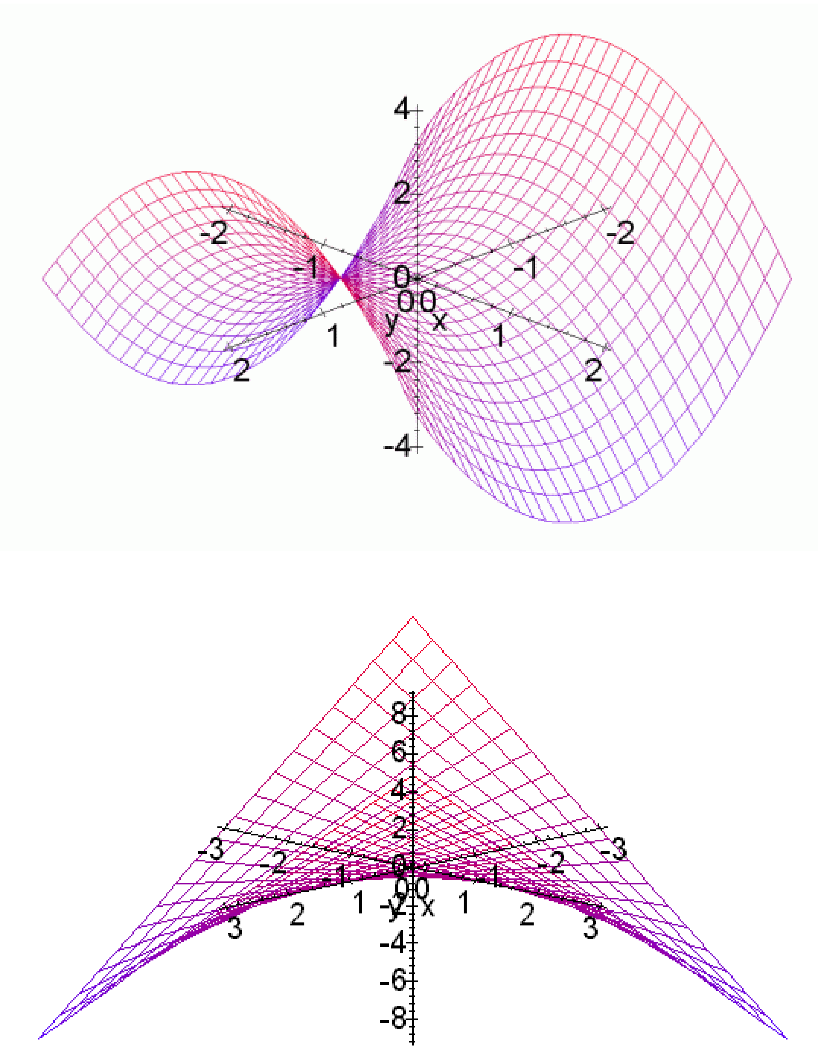


Abbildung 1: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Flächendarstellung*

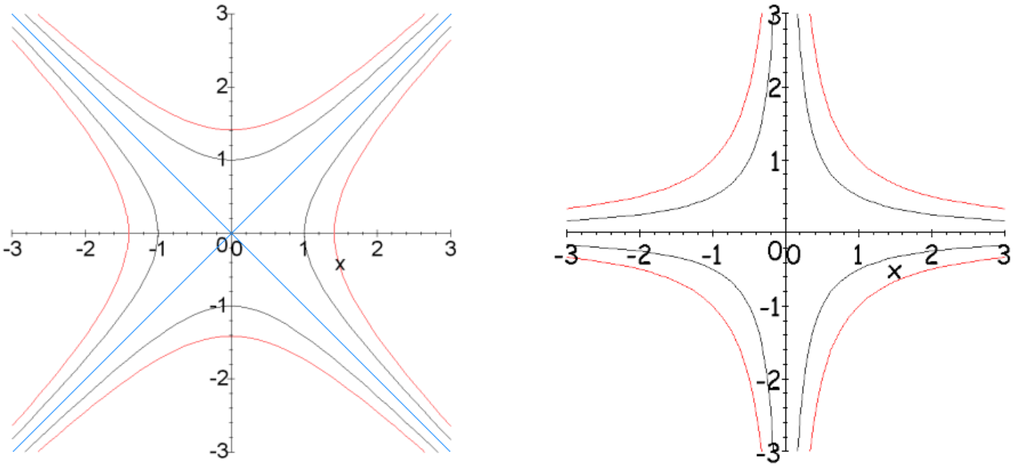


Abbildung 2: *Real- und Imaginärteil von $w = z^2$ in Niveauliniendarstellung. Die Linien stehen für die Werte* $\mathrm{Re}w = 0$, $\mathrm{Re}w = \pm 1$, $\mathrm{Re}w = \pm 2$ *und* $\mathrm{Im}w = \pm 1$, $\mathrm{Im}w = \pm 2$

Rufen wir uns als nächstes einige Ergebnisse der Linearen Algebra in Erinnerung: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei eine lineare Abbildung mit Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Spezielle Fälle sind Drehungen,

$$A = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

Streckungen,

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}_+,$$

und Drehstreckungen

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}.$$

Zu einer Drehstreckung A gibt es genau ein $t \in [0, 2\pi)$ mit

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Bekanntlich ist $\mathbb{R}^2$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum mit kanonischer Basis $\{(1,0), (0,1)\}$. Wir definieren:

Definition 0.2 *1.* $\mathrm{i} := (0, 1)$ *und* $\mathrm{i}^2 := (-1, 0)$.

2. Wir betten $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{C}$ *ein vermöge der Abbildung*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, 0) \end{cases}$$

Wir schreiben kurz $(x, 0) =: x$.

Φ ist offensichtlich injektiv, und wir können die Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ebenfalls in $\mathbb{C}$ einbetten: $(x, 0)(y, 0) := (xy, 0)$; insbesondere: $(1, 0)(x, 0) = (x, 0)$.
Die Fortsetzung der Multiplikation von der Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$ ergibt:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Körper mit $\Phi(\mathbb{R})$ (also $\mathbb{R}$) als Unterkörper.
Die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{R}$–lineare Abbildung. Die (reelle) Matrix der Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (a, b)(x, y)$ ist bezüglich der kanonischen Basis

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

also gerade eine Drehstreckung.
Vermöge der Abbildung

$$(a, b) \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

bilden die reellen 2×2–Matrizen dieser Gestalt einen zu $\mathbb{C}$ isomorphen Körper.

Bemerkung: Die Isomorphie erhält man auch durch eine andere Überlegung: eine komplexe Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ lässt sich auch in der Form $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ schreiben, d. h. die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times$ ist das direkte Produkt der (multiplikativen) Gruppen $\mathbb{R}_+^\times$ und S^1. Mit der Isomorphie $S^1 \cong \mathrm{SO}(2)$ ist also $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_+^\times \times \mathrm{SO}(2)$, dementsprechend

$$\mathbb{C} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Versehen wir $\mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) (\cong \mathbb{R}^4)$ mit der EUKLIDischen Norm, so gilt:

$$\|\Phi(a, b)\| = \left\| \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2a^2 + 2b^2} = \sqrt{2}\|(a, b)\|,$$

mit anderen Worten: Φ erhält bis auf einen konstanten Faktor die Norm.
Wir setzen:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{für } z = (x,y).$$

Lemma 0.3 *Der Betrag einer komplexen Zahl hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Beweis:

1. offensichtlich.
2. $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2$
3. $\underline{\alpha)}$ $z_1 + z_2 = 0$. Dieser Fall ist klar.
   $\underline{\beta)}$ Sei $z_1 + z_2 \neq 0$. Dann ist
   $$1 = \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2}.$$
   Es folgt
   $$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\, 1| &= \left| \mathrm{Re} \frac{z_1}{z_1 + z_2} + \mathrm{Re} \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| \\ &\leq \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_1 + z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1 + z_2|} \end{aligned}$$

□

Beispiel 0.4 Beispiele für Funktionen in z:

1. $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$ (konstante Funktion)
2. $f(z) = z$ (identische Funktion)
3. $f(z) = \overline{z}$ (Konjugation)
4. $f(z) = a \cdot z$, $a \neq 0$ (Drehstreckung mittels a)
5. $f(z) = \mathrm{Re}\, z$ (Projektion auf x–Achse)

6. $f(z) = \operatorname{Im} z$ (Projektion auf y–Achse)
7. $f(z) = |z|$
8. $f(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_\nu \in \mathbb{C}$ (Polynom über $\mathbb{C}$)
9. $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, p, q Polynome, $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; q(z) = 0\}$ (rationale Funktion). Ein Spezialfall hiervon ist eine *lineare Transformation*
$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, z \neq -\frac{d}{c}.$$
10. Wir schreiben $z = x + \mathrm{i}y$. Sei
$$f(z) = \sum_{\substack{\mu=1,\ldots,m \\ \nu=1,\ldots,n}} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$
Dann lässt sich dieses Polynom auch als Polynom in z und $\overline{z}$ schreiben:
$$f(z) = \sum_{\substack{\kappa=1,\ldots,k \\ \lambda=1,\ldots,l}} b_{\kappa\lambda} z^\kappa \overline{z}^\lambda.$$
11. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ (Potenzreihe). Bereits aus der reellen Analysis bekannte Potzenzreihen wie
$$\begin{aligned} \exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =: \mathrm{e}^z \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$
lassen sich ebenso über $\mathbb{C}$ definieren.

Wie über $\mathbb{R}$ gelten die EULERschen Formeln
$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$$
sowie die Identität
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z.$$

Schreiben wir $z = x + \mathrm{i}y$ folgt

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \Rightarrow |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}z}, \arg(\mathrm{e}^z) = \mathrm{Im}z.$$

Bekanntermaßen gilt $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$. Es folgt daher für $k \in \mathbb{Z}$: $\mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}})^k = \mathrm{e}^z$. Also hat die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \mathrm{e}^z \in \mathbb{C}$ die Perioden $2\pi\mathrm{i} \cdot k$. Dies sind gleichzeitig die einzigen Perioden, denn

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \Rightarrow 1 = \mathrm{e}^{z_1 - z_2} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \text{ mit } z_1 - z_2 = x + \mathrm{i}y.$$

Aus dem Verhalten von exp, sin und cos auf $\mathbb{R}$ folgt $x = 0$ und $\sin y = 0 \wedge \cos y = 1 \Rightarrow y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ist ein Homomorphismus mit Kern $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. Hieraus erhalten wir ein weiteres Resultat: Sei $z = x + \mathrm{i}y$. Es gilt $\sin z = 0 \iff \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} = 1 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Mit $\cos z = \sin(z + \pi/2)$ folgt:
Der komplexe Sinus und Cosinus haben nur reelle Nullstellen und die Perioden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Sie haben keine weiteren Perioden.

Kapitel 1

Holomorphe Funktionen

Zur Erinnerung: $I \subset \mathbb{R}$ sei ein offenes Intervall, und sei $z_0 \in I$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in z_0, falls der Limes

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Dazu ist äquivalent: Es existiert eine in z_0 stetige Funktion Δ auf I mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\Delta(z), \ z \in I.$$

Es gilt $\Delta(z_0) = f'(z_0)$.
Auf $\mathbb{R}^2$ sieht dies analog aus: $U \subset \mathbb{R}^2$ sei offen, $f : U \to \mathbb{R}^2$ heißt (reell) differenzierbar in z_0, falls eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existiert mit

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + o(\|z - z_0\|) \quad (z \to z_0).$$

Schreiben wir $z = (x, y)$, $f = (f_1, f_2)$, hat A die folgende Matrixdarstellung (Jacobimatrix):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

Eine äquivalente Formulierung der totalen reellen Differenzierbarkeit von f ist: Es existiert eine in z_0 stetige Abbildung $A : U \to \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A_1(z) & B_1(z) \\ A_2(z) & B_2(z) \end{smallmatrix}\right)$, so dass für alle $z \in U$ gilt: $f(z) = f(z_0) + A(z)(z - z_0)$. Es gilt $A(z_0) = Df(z_0)$.

Unser Ziel ist, herauszuarbeiten, wie der Differentialquotient, der ja auch für komplexe Zahlen sinnvoll ist, mit der Jacobimatrix in Einklang gebracht werden kann.

Wir schreiben dazu zuerst $f := g + \mathrm{i}h$ mit reellwertigen Funktionen g und h, ferner $z = x + \mathrm{i}y$, $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$. Dann bedeutet (reelle) Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned}
f(z) &= \begin{pmatrix} g(z) \\ h(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1(z) & B_1(z) \\ A_2(z) & B_2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1(z)(x - x_0) & B_1(z)(y - y_0) \\ A_2(z)(x - x_0) & B_2(z)(y - y_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g(z_0) \\ h(z_0) \end{pmatrix} + (x - x_0) \underbrace{\begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_1(z)} + (y - y_0) \underbrace{\begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix}}_{=:\Delta_2(z)}
\end{aligned}$$

Die Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$ sind in z_0 stetig mit

$$\Delta_1(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \quad \Delta_2(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Definition 1.1 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. f heißt* (komplex) differenzierbar in z_0, *falls der Grenzwert*

$$(1.1) \qquad f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.
$f : U \to \mathbb{C}$ wird komplex differenzierbar genannt, falls f in allen Punkten $z_0 \in D$ komplex differenzierbar ist.
f heißt holomorph *in $z_0 \in U$, falls f in einer Umgebung um z_0 komplex differenzierbar ist.*

Äquivalent zu (1.1) ist: es existiert eine in z_0 stetige Funktion $\Delta : U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$. Dazu setzt man als $\Delta(z)$ gerade den Differenzenquotienten in (1.1)

Bemerkung: Sei $z \in \mathbb{C}$. $\mathbb{C} \ni w \mapsto \Delta(z) \cdot w \in \mathbb{C}$ (Multiplikation in $\mathbb{C}$) ist $\mathbb{C}$–linear, also auch $\mathbb{R}$–linear.
Folglich gilt: Falls $f = g + \mathrm{i}h$ in z_0 komplex differenzierbar ist, ist f auch reell differenzierbar (man wähle $A(z) = \Delta(z)$), und es gilt

$$A(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial h}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

mit folgenden Gleichungen

$$(1.2) \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(z_0), \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial g}{\partial y}(z_0)$$

(CAUCHY–RIEMANNsche Differentialgleichungen) oder in Kurzschreibweise

$$g_x = h_y, \quad h_x = -g_y$$

Die Umkehrung gilt auch: Sei f in $z_0 \in U$ reell differenzierbar, und gelte $f(z) = f(z_0) + A(z)(z - z_0)$, $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R})$, $z \mapsto A(z)$ in z_0 stetig, und gelten die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen in z_0. Dann hat $A(z_0)$ die Gestalt einer komplexen Zahl vermöge des Isomorphismus $\Phi : (x, y) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$.
Die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen bedeuten also nichts Anderes als dass die (reelle) JACOBImatrix von f die Form einer Drehstreckung hat und damit mit einer komplexen Zahl identifiziert werden kann.

Satz 1.2 *$f : U \to \mathbb{C}$ ist genau dann reell differenzierbar in $z_0 \in U$, wenn es in z_0 stetige Funktionen $A_1, A_2 : U \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$f(z) = f(z_0) + A_1(z)(z - z_0) + A_2(z)(\overline{z} - \overline{z_0})$$

Beweis: Reelle Differenzierbarkeit von f in z_0 ist äquivalent zu der Aussage

$$(1.3) \qquad f(z) = f(z_0) + (x - x_0)\Delta_1(z) + (y - y_0)\Delta_2(z)$$

mit in z_0 stetigen Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$.
Nun gilt

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(z - z_0 + \overline{z} - \overline{z_0}), \quad y - y_0 = \frac{1}{2i}(z - z_0 - \overline{z} + \overline{z_0}).$$

Setzen wir dies in Gleichung (1.3) ein, erhalten wir

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)\underbrace{\frac{1}{2}\big(\Delta_1(z) + \mathrm{i}\Delta_2(z)\big)}_{=:A_1(z)} + (\overline{z} - \overline{z_0})\underbrace{\frac{1}{2}\big(\Delta_1(z) - \mathrm{i}\Delta_2(z)\big)}_{=:A_2(z)}.$$

Umgekehrt kann man aus zwei Funktionen A_1, A_2, die diese Gleichung erfüllen, wiederum zwei Funktionen $B_1, B_2 : U \to \mathbb{C}$ gewinnen, so dass

$$f(z) = f(z_0) + (x - x_0)B_1(z) + (y - y_0)B_2(z).$$

Diese Rechnung bleibt dem Leser zur Übung überlassen. $\square$

Die Aussage des Satzes legt es nahe, z und $\overline{z}$ als unabhängige Variablen zu betrachten. Man definiert daher die sogenannten WIRTINGERschen Ableitungen[1]

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x - \mathrm{i} f_y), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}(f_x + \mathrm{i} f_y), \tag{1.4}$$

Diese Definition wird klarer, wenn man sich folgende Rechnung vor Augen führt: Wir schreiben $f = g + \mathrm{i}h$. Dann ist

$$f' = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

Falls f komplex differenzierbar ist, gelten die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen, und f' kann mit der komplexen Zahl $g_x - \mathrm{i} g_y$ identifiziert werden. Gleichzeitig gilt

$$f_x = g_x + \mathrm{i}h_x = g_x - \mathrm{i}g_y, \quad f_y = g_y + \mathrm{i}h_y = g_y + \mathrm{i}g_x,$$

und für $\partial f/\partial z$ und $\partial f/\partial \overline{z}$ folgt:

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial f}{\partial z} &= f_x - \mathrm{i} f_y \\ &= g_x - \mathrm{i}g_y - \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i}g_x) = 2g_x - 2\mathrm{i}g_y = 2f' \\ 2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= f_x + \mathrm{i} f_y \\ &= g_x - \mathrm{i}g_y + \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i}g_x) = 0 \end{aligned}$$

Wir haben damit die Aussage, dass, falls f komplex differenzierbar in z_0 ist, gilt:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

Die Bedeutung der zweiten Gleichung wird vor allem durch den folgenden Satz deutlich

Satz 1.3 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$, und sei $z_0 \in U$. Dann ist f in z_0 komplex differenzierbar genau dann, wenn f in z_0 reell differenzierbar und $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ist.*

[1]Nach Wilhelm WIRTINGER (1865 – 1945). Die Operatoren wurden von Henri POINCARÉ eingeführt, die Theorie um sie wurde jedoch von WIRTINGER ausgebaut, weshalb sich vor allem im deutschsprachigen Raum der Begriff WIRTINGERkalkül eingebürgert hat.

Beweis: Die Richtung „$\Longrightarrow$“ wurde bereits in obiger Rechnung gezeigt.
„$\Longleftarrow$“: Sei f reell differenzierbar und gelte $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} f_x + \mathrm{i} f_y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad g_x + \mathrm{i} h_x + \mathrm{i}(g_y + \mathrm{i} h_y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad g_x - h_y + \mathrm{i}(h_x + g_y) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad g_x = h_y \wedge h_x = -g_y. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.4 Beispiele und Regeln für komplexe Differentiation:

1. $f(z) = \overline{z}$ ist nirgends komplex differenzierbar, denn $Df = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt nicht die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.
2. $f \mapsto f'$ ist $\mathbb{C}$-linear.
3. Es gelten Produkt-, Quotienten- und Kettenregel.
4. Sei $f(z) = z^n$. Dann ist $f'(z) = nz^{n-1}$.
5. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$.

   Behauptung: f ist auf der offenen Kreisscheibe $B_R(z_0)$ holomorph.

   1. Beweis:

   (a) Man zeigt: f ist in z_0 differenzierbar; dies ist offensichtlich.

   (b) Man zeigt durch Umentwicklung: f ist in z_1 differenzierbar mit $|z_1 - z_0| < R$.

   2. Beweis: OBdA. nehmen wir an, der Entwicklungspunkt sei $z_0 = 0$ und damit $f(z) = \sum_n a_n z^n$.

   Sei $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| < R$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(z) - f(b) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - b^n) \\ &\overset{!}{=} (z - b)\Delta(z) \text{ mit } \Delta : B_R(0) \to \mathbb{C} \text{ in } b \text{ stetig} \\ &= (z - b) \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{z^n - b^n}{z - b}. \end{aligned}$$

   Was wir also zeigen müssen, ist die Stetigkeit dieser Reihe in b.

Nebenrechnung:

$$\frac{z^n - b^n}{z - b} = \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-1-k} b^k$$

ist ein Polynom vom Grad n-1. Sei

$$\varphi_n(z) := \begin{cases} \frac{z^n - b^n}{z - b},\ z \neq b \\ nb^{n-1},\ z = b \end{cases}$$

Sei nun $r < R$, und gelte $|b| \leq r$, $|z| \leq r$. Dann ist

$$|\varphi_n(z)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|z|}_{\leq r}{}^{n-1-k} \underbrace{|b|}_{\leq r}{}^{k} \leq nr^{n-1}$$

Wir haben also die Abschätzung

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(z)\Big| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\varphi_{n+1}(z)\Big| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)r^n.$$

Es bleibt zu zeigen: die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$ hat auch den Konvergenzradius R.

Sei R' der Konvergenzradius dieser Reihe, also

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \underbrace{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}_{=1} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}.$$

Es bleibt zu zeigen: $R = R'$.

$\underline{\alpha)}$ R' sei der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + z\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n \Rightarrow R' \leq R.$$

$\underline{\beta)}$ Sei $|z| < R, z \neq 0$. Dann ist nach Voraussetzung $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$. Es folgt

$$\sum_{n=0} |a_{n+1}z^n| \leq \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| - \frac{1}{z}|a_0|.$$

Lemma 1.5 (Regeln für die Wirtingerschen Ableitungen) *1.* $\frac{\partial}{\partial z}$ *und* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *sind* $\mathbb{C}$*–lineare Operatoren, für die die* LEIBNIZ*sche Regel gilt.*

2. $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}}$.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, *falls* f *holomorph,* $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$, *falls* $\overline{f}$ *holomorph.*

4. $\dfrac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \dfrac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0, \quad \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1.$

5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = \dfrac{1}{4} \underbrace{\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}_{=:\Delta f}$

6. *Sei* $w = f(z)$. *Dann gilt*

$$\frac{\partial}{\partial z}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(g \circ f) = \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}.$$

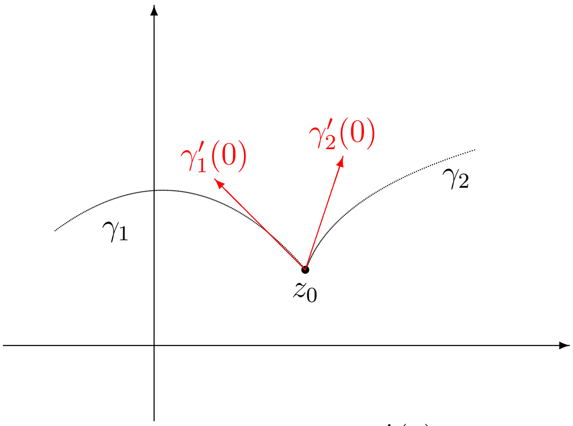
7. *Sei* $U \subset \mathbb{C}$ *offen und seien* $\varphi : [a,b] \to U$ *und* $f = g + \mathrm{i}h : U \to \mathbb{C}$ *reell differenzierbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi)(t_0) &= Df(\varphi(t_0))\varphi'(t_0) = \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g_x\varphi_1'(t_0) + g_y\varphi_2'(t_0) \\ h_x\varphi_1'(t_0) + h_y\varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \\
&= f_x\varphi_1'(t_0) + f_y\varphi_2'(t_0).
\end{aligned}$$

In komplexer Schreibweise ist dies

$$\begin{aligned}
\ldots &= \frac{1}{2}\big(f_x - \mathrm{i}f_y\big)(\varphi_1'(t_0) + \mathrm{i}\varphi_2') + \frac{1}{2}\big(f_x + \mathrm{i}f_y\big)(\varphi_1'(t_0) + \mathrm{i}\varphi_2') \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\varphi'(t_0).
\end{aligned}$$

Anwendung von Eigenschaft 7: $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \varepsilon] \to \mathbb{C}$ seien stetig mit $\gamma_j(0) = z_0$ und $\gamma_j'(0) \neq 0$.



Wir haben $\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)}$.

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und injektiv. Wir werden später zeigen, dass dann automatisch $f'(z) \neq 0$ für $z \in U$ folgt. Wir betrachten $t \mapsto f \circ \gamma_j(t)$. Nach Eigenschaft 7 ist

$$(f \circ \gamma_j)'(0) = f_z(z_0)\gamma_j'(0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{\gamma_j'(0)}$$

Falls f sogar holomorph ist, gilt $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$ und $f_z(z_0) = f'(z_0) \neq 0$. Damit ist

$$\measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \arg\frac{f'(z_0)\gamma_2'(0)}{f'(z_0)\gamma_1'(0)} = \arg\frac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} = \measuredangle(\gamma_1, \gamma_2),$$

mit anderen Worten: f ist „winkeltreu“.

Es gilt auch die Umkehrung: Ist f winkeltreu und reell differenzierbar, so ist f holomorph. Dazu betrachten wir die Wege $\gamma_1 : t \mapsto z_0 + t$, $\gamma_2 : t \mapsto z_0 + it$.

Aus der Winkeltreue von f folgt $\measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) = \frac{\pi}{2}$ und hieraus

$$(f \circ \gamma_2)'(0) = \mathrm{i}(f \circ \gamma_1)'(0).$$

Es folgt weiter

$$\mathrm{i}(f_z(z_0) - f_{\overline{z}}(z_0)) = \mathrm{i}(f_z(z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)),$$

also

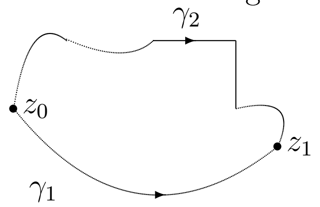
$$f_{\overline{z}}(z_0) = 0$$

und somit die Holomorphie von f in z_0.

Kapitel 2

Kurvenintegrale

Wege $\gamma : \mathbb{R} \supset [a, b] \to \mathbb{C}$ haben wir vorhin als (stückweise) stetig differenzierbare Funktionen kennen gelernt.



In diesem Kapitel untersuchen wir Integrale längs solcher Wege. Das Hauptaugenmerk ist der Frage gerichtet, inwieweit das Integral längs eines Weges von der Wahl des Weges abhängt — bei der Integration in $\mathbb{R}$ kommt man ja nicht in diese Verlegenheit.
Die nahe liegende Definition eines Wegintegrales ist dabei

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Betrachten wir als Beispiel den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Dann ist

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Aber bevor wir weitere Beispiele durchgehen, soll der Begriff des Wegintegrals zunächst auf ein etwas solideres Fundament gestellt werden.
Die Abbildung $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$ sei Riemann–integrierbar (oder messbar und Lebesgue–integrierbar), mit anderen Worten: $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind R-integrierbar (bzw. messbar und L-integrierbar). Wir definieren das Integral der komplexwertigen Funktion f als

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \mathrm{Re}f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Lemma 2.1 *Das Integral (2.2) hat folgende Eingenschaften:*

1. *Der Operator* $\int_a^b : L^1([a,b]) \to \mathbb{C}$ *ist komplex linear.*

2. $$\int_a^b \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

3. $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ *sei stückweise stetig differenzierbar,* $g : [c,d] \to \mathbb{C}$ *sei integrierbar. Dann gilt die Substitutionsregel*
$$\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

4. $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Der Beweis bleibt dem Leser zur Übung überlassen.

Beispiel 2.2

1. Sei $\mathbb{C} \ni \omega \neq 0$, und sei $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Für die Funktion $g(t) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ gilt $g'(t) = f(t)$. Dementsprechend gilt
$$\int_a^b \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right]_a^b.$$
Es folgt für $n \in \mathbb{Z}$:
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & ,n = 0 \\ 0 & ,n \neq 0 \end{cases}.$$
Eine erste Folgerung hieraus ist:
$$\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\cdot}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}\,\mathrm{d}t = \delta_{mn}.$$
Eine weitere Folgerung ist:
$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^{2n}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-2k)t}\,\mathrm{d}t = 2^{-2n}\binom{2n}{n}2\pi.\end{aligned}$$

2. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re} z > 0$. Wir definieren die komplexe Gammafunktion durch
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,$$
wobei $t^{z-1} := \exp((z-1)\ln t)$. Auf $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re} z > 0\}$ ist Γ hierdurch wohldefiniert.

3. Sei $f \in L^1([0, 2\pi])$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist der m-te FOURIERkoeffizient das Integral
$$\widehat{f}(m) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{d}t.$$

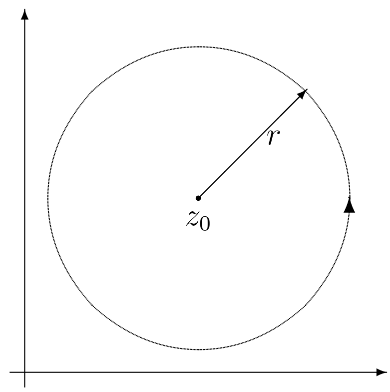
Definition 2.3 *$\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sei stückweise stetig differenzierbar, $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Das* Kurvenintegral *von f längs γ wird definiert durch*
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Bezeichnung: Sei $U \subset \mathbb{C}$. Eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \to U$ wird *Weg* genannt. $A(\gamma) := \gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt*, $E(\gamma) := \gamma(b)$ *Endpunkt* von γ.
γ heißt *Integrationsweg*, falls γ stückweise stetig differenzierbar ist. Ist γ stetig differenzierbar, spricht man von einem *stetig differenzierbaren Weg*. Gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, so heißt γ *glatt*.[1]
Ein Weg γ heißt genau dann *geschlossen*, wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$. Ist darüber hinaus $\gamma|_{[a,b)}$ injektiv, spricht man von einem *einfach geschlossenen* Weg. $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$ wird die *Spur von* γ genannt und oft mit $Sp(\gamma)$ angekürzt. Ist $M \subset \mathbb{C}$ die Spur eines Integrationsweges γ, so sagt man, γ *parametrisiert* M.

Beispiel 2.4

1. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, und sei $r > 0$.

Sei $\kappa(r, z_0) := z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. κ ist offensichtlich stetig differenzierbar. Ferner ist κ glatt, denn $\kappa'(t) = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 0$. Die Spur von κ ist $Sp(\kappa) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r\}$.



[1] $\gamma'(t_0) = 0$ ist nicht zu verwechseln mit dem Verschwinden der Ableitung einer reellwertigen Funktion: $\gamma'(t_0) = 0$ bedeutet nicht, dass γ eine „waagerechte Tangente“ an t_0 hat, sondern, dass — bildlich gesprochen — γ an t_0 „Geschwindigkeit 0“ hat.

Es gilt

$$\int_\kappa \frac{1}{z - z_0}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

$R > r$ sei der Konvergenzradius der Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Dann ist das Integral von f längs κ:

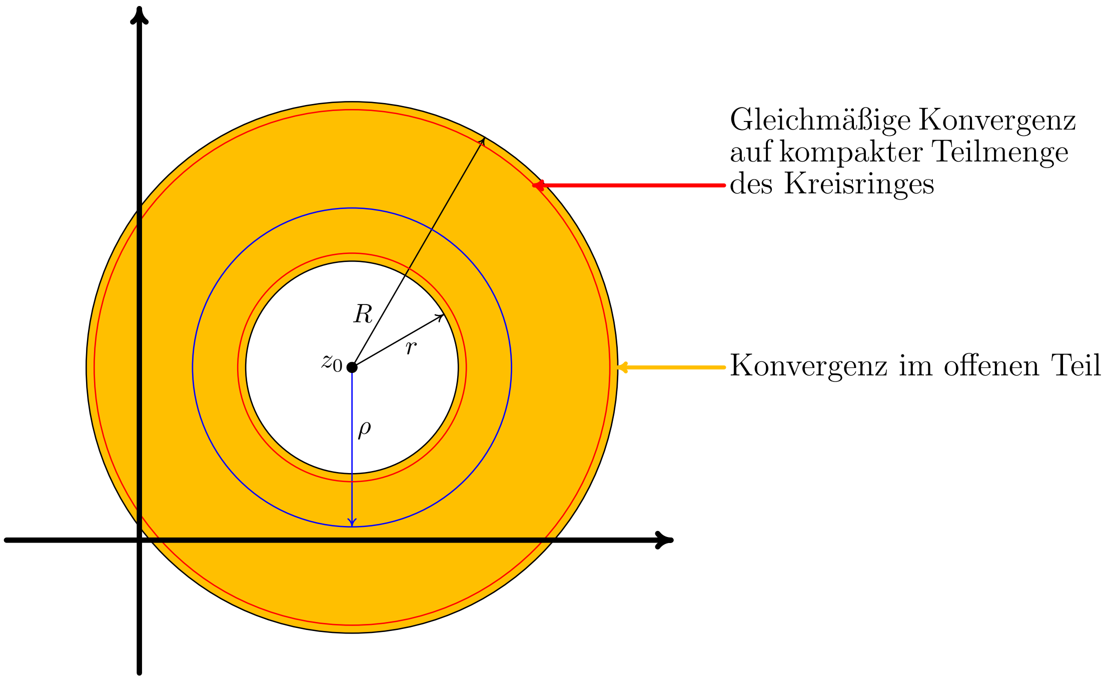
$$\int\limits_\kappa f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Big)\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}r\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=0,\ n=0,1,\ldots} = 0$$

Sei f dargestellt durch eine LAURENTreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil}}.$$

Der Nebenteil ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R; der Hauptteil ist keine Potenzreihe, aber es ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ eine Potenzreihe mit Radius $1/r$, und wir haben

$$|z - z_0|^{-1} < \frac{1}{r} \iff |z - z_0| > r.$$



Eine LAURENTreihe stellt auf einer kompakten Teilmenge des Kreisringes eine holomorphe Funktion dar.

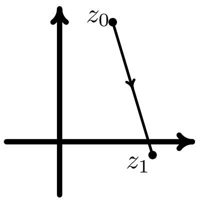
Sei $g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$. Dann ist $g(1/(z-z_0))$ genau dann wohldefiniert, wenn $|z-z_0| > r$.

Sei $r < \rho < R$. $\kappa(z_0,\rho) := z_0 + \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t < 2\pi$. Es gilt

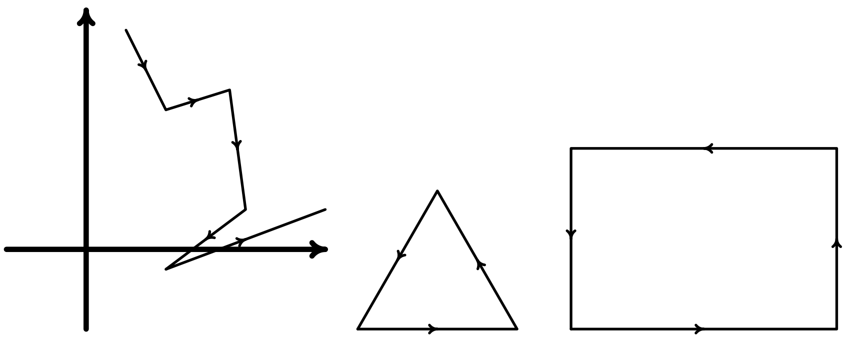
$$\begin{aligned}
\int_{\kappa(z_0,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z &= \mathrm{i}\rho \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\,\mathrm{d}t}_{=2\pi\delta_{-1,n}} \\
&= 2\pi\mathrm{i} a_{-1}.
\end{aligned}$$

Man nennt daher a_{-1} auch das *Residuum*, denn es bleibt als einziger Summand bei dem Integral über den einfach geschlossenen Kreis übrig.

2. Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. Die „Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1“, den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ bezeichnen wir mit $[z_0, z_1]$.

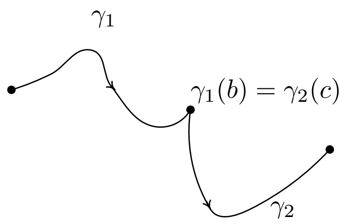


Allgemein: Seien $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Ein Polygonzug ist der Weg $\gamma : [0,n] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_k + (t-k)(z_{k+1} - z_k)$, $t \in [k, k+1]$. Die Spur solch eines Polygonzuges bezeichnen wir mit $Sp(\gamma) =: [z_0, \ldots, z_n]$.



Speziell: Sei Δ ein Dreieck mit Eckpunkten z_0, z_1, z_2. Der Polygonzug $[z_0, z_1, z_2, z_0]$ parametrisiert $\partial\Delta$.

3. Gegeben seien die Wege $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$.



Der zusammengesetzte Weg ist definiert durch:

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a, b + (d-c)] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t + (c-b)) & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Analog kann man n Wege $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, sofern für $k = 1, \ldots, n-1$ der Endpunkt von γ_k mit dem Anfangspunkt von γ_{k+1} übereinstimmt. Z. B. ist der Streckenzug $[z_0, \ldots, z_n] = [z_0, z_1] \cdot [z_1, z_2] \cdots [z_{n-1}, z_n]$.

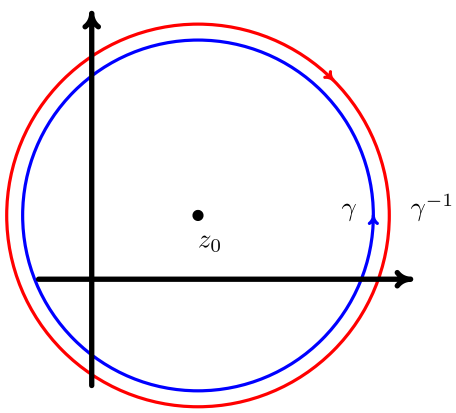
Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a,b]$, nennen wir $\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ einen *Teilweg*. Offensichtlich gilt $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_n$.

Bezeichnung: Existiert eine Zerlegung von γ in glatte Teilwege, so nennen wir γ *stückweise glatt*.

Zu einem Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiert man den *entgegengesetzten Weg* $\gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma^{-1}(t) := \gamma(a+b-t)$.

Offenbar ist $Sp(\gamma^{-1}) = Sp(\gamma)$.

Ist z. B. γ der Streckenzug $[z_0, \ldots, z_n]$ so ist der entgegengesetzte Weg $\gamma^{-1} = [z_n, \ldots, z_0]$.

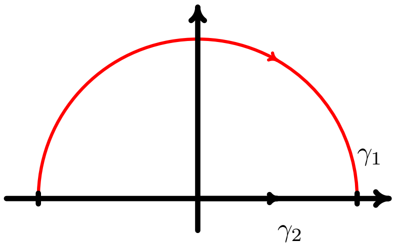


Ist z. B. $\gamma = \kappa(r, z_0) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, wird γ^{-1} dargestellt durch $\gamma^{-1}(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}(2\pi - t)}$.

4. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass für holomorphe Funktionen f das Wegintegral $\int_\gamma f$ unabhängig vom Weg γ ist, und dass nur Anfangs- und Endpunkt von γ relevant sind.

   Dass bei nicht holomorphen Funktionen das Wegintegral sehr wohl vom Weg abhängen kann, soll dieses Beispiel verdeutlichen:

   Sei $f(z) := |z|$, und seien $\gamma_1 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - t)}$, $\gamma_2 : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2(t) := t$.

   Wir haben

   $$\int_{\gamma_1} |z| \,\mathrm{d}z = \int_0^\pi 1 \cdot \gamma_1'(t) \,\mathrm{d}t = \gamma_1(\pi) - \gamma_1(0) = 2,$$

   aber

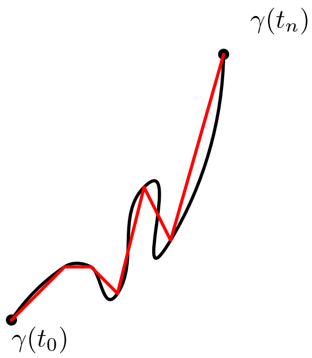
   $$\int_{\gamma_2} |z| \,\mathrm{d}z = \int_{-1}^1 |t| \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-1}^1 = 1.$$

5. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg, so setzen wir

   $$L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{Re}\gamma'(t))^2 + (\mathrm{Im}\gamma'(t))^2} \,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

   $L(\gamma)$ ist die Länge des Weges.

   Dies kann geometrisch wie folgt gedeutet werden: Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Wir approximieren den Weg durch den Polygonzug $[\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)]$.

Die Länge von γ ist dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|.$$

Gleichzeitig ist das Integral in (2.3) der Grenzwert der RIEMANNschen Summe

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\gamma'(\xi_k)|(t_k - t_{k-1}).$$

Um zu zeigen, dass diese beiden Grenzwerte gleich sind, gibt es zwei Möglichkeiten: zum Einen kann man den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf jedes Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ anwenden; zum Anderen gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) - \gamma'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})| \\
=&\Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\gamma'(t) - \gamma'(\xi_k))\,\mathrm{d}t \Big| \le \sup_{|t-t^*|<|t_k-t_{k-1}|} |\gamma'(t) - \gamma'(t^*)|(t_k - t_{k-1})
\end{aligned}$$

Mit der Stetigkeit von γ' auf $[a, b]$ folgt die Behauptung.

Satz 2.5 *γ sei ein Integrationsweg, $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt*

$$\Big| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \Big| \le L(\gamma) \max_{z\in Sp(\gamma)} |f(z)|.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Big| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \Big| &= \Big| \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \Big| \\
&\le \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le \max_{z\in Sp(\gamma)} |f(z)| \underbrace{\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t}_{=L(\gamma)}.
\end{aligned}$$

□

Definition 2.6 *$I, J \subset \mathbb{R}$ seien kompakte Intervalle, $\varphi : J \to I$ sei bijektiv, stückweise stetig differenzierbar und streng monoton wachsend mit $\varphi'(t) \neq 0$ auf J.*
φ wird Parametertransformation *(kurz: PT) von J auf I genannt.*

Bemerkung:

1. Sind φ und ψ Parametertransformationen, so sind auch $\varphi \circ \psi$ und φ^{-1} Parametertransformationen.

2. Ist $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg und $\varphi : J \to I$ eine PT, so ist auch $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg. Man sagt dann, $\gamma \circ \varphi$ geht aus γ *durch Umparametrisierung (mittels φ)* hervor.

Satz 2.7 *γ_1, γ_2 seien Integrationswege in $\mathbb{C}$, γ_1 gehe aus γ_2 durch Umparametrisierung hervor. $f : Sp(\gamma_1) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt:*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis: Gelte $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$, Parametertransformation sei $\varphi : [c,d] \to [a,b]$. Es ist $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_c^d f(\gamma_1 \circ \varphi(s))\underbrace{\gamma_1'(\varphi(s))\varphi'(s)}_{=(\gamma_1\circ\varphi)'(s)}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_c^d f(\gamma_2(s))\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8 *γ sei ein Integrationsweg, $f : Sp(\gamma) \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann gilt*

$$\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Beweis: Gelte $\gamma, \gamma^{-1} : [a,b] \to \mathbb{C}$. $\gamma^{-1}(t) = \gamma(a+b-t)$.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^{-1}} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(a+b-t))\gamma'(a+b-t) \\
&\overset{s:=a+b-t}{=} \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

□

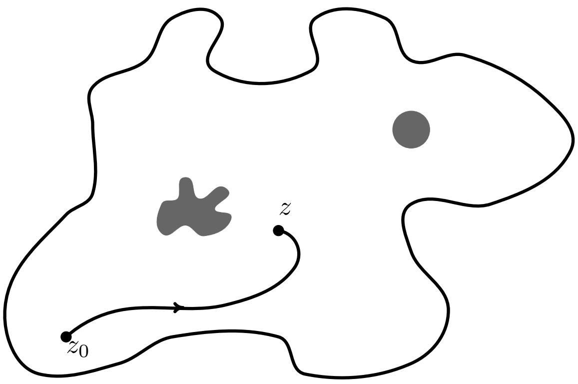
Kapitel 3

Die Stammfunktion

Nachdem wir im vorigen Kapitel die Grundlagen von Kurvenintegralen erarbeitet haben, befassen wir uns nun mit der konkreten Berechnung eines solchen Integrals. Besonderes Augenmerk gilt der Frage, ob auch im Komplexen eine Stammfunktion verwendet werden kann. Unser Wunsch ist, dass für einen festen Punkt z_0 und einen Weg γ, der z mit z_0 verbindet, gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0)$$

mit $F'(\zeta) = f(\zeta)$. In diesem Fall haben wir gleichzeitig eine Wegunabhängigkeit des Integrals, denn dies hängt nur noch von Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.



3.1 Stammfunktionen und der Cauchysche Integralsatz

Definition 3.1 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig.*
$F : U \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, *falls F auf U holomorph ist und $F' = f$ gilt. Wir sagen, f habe eine lokale Stammfunktion auf U, falls es zu jedem Punkt von U eine Umgebung V gibt, so dass $f|_V$ eine Stammfunktion (auf V) hat.*

Satz 3.2 *$f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig und habe auf U die Stammfunktion F. γ sei Integrationsweg von z_0 nach z_1. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_0).$$

Beweis: Gelte $\gamma : [a,b] \to U$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sei eine Unterteilung von $[a,b]$, so dass $\gamma|_{[t_k,t_{k-1}]}$ stetig differenzierbar sei. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \underbrace{f(\gamma(t))\gamma'(t)}_{(F\circ\gamma)'(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^n (F\circ\gamma(t_k) - F\circ\gamma(t_{k-1})) \\
&= F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

□

Hieraus folgt unmittelbar:

Korollar 3.3 *$f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig mit Stammfunktion F, γ sei ein einfach geschlossener Integrationsweg in U. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beispiel 3.4

1. $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Dann ist

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}.$$

Die Stammfunktion existiert für $n \geq 0$ auf $U = \mathbb{C}$, für $n \leq -2$ auf $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ist γ ein Integrationsweg von z_0 nach z_1 in U, dann gilt

$$\int_\gamma z^n \, \mathrm{d}z = \frac{1}{n+1}\left(z_1^{n+1} - z_0^{n+1}\right)$$

2. f sei dargestellt durch eine LAURENTreihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

auf dem Kreisring

$$U : 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty.$$

Falls $a_{-1} = 0$, ist

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(z - z_0\right)^{n+1}$$

Stammfunktion von f auf U.

3. $f(z) = \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

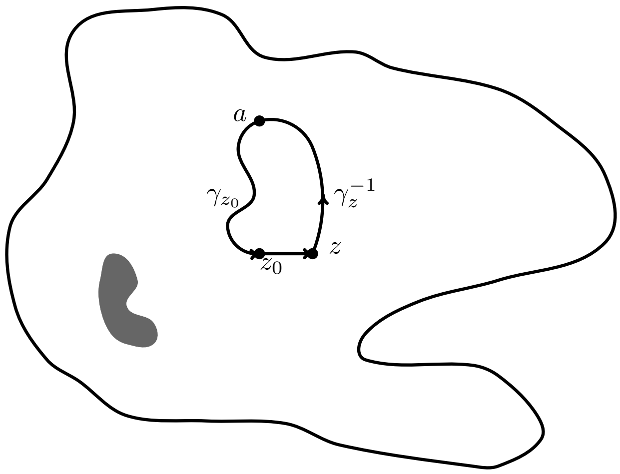
Satz 3.5 *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, d. h. offen, und je zwei Punkte in G sind durch einen Integrationsweg verbindbar. Für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gelte $\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.*

Beweis: Sei $a \in G$ fest. Wir setzen

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta) \, d\zeta,$$

wobei γ_z ein Integrationsweg von a nach z ist.
Behauptung: $F'(z_0) = f(z_0)$ für $z_0 \in G$, also

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} \stackrel{!}{=} f(z_0).$$



Aus der Voraussetzung, dass für einen beliebigen geschlossenen Integrationsweg γ das Integral $\int_\gamma f = 0$ ist, folgt für den Weg $\gamma = \gamma_{z_0}[z_0, z]\gamma_z^{-1}$:

$$\underbrace{\int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}_{=F(z_0)} + \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \underbrace{\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}_{=F(z)} = 0$$

und mit der Parameterdarstellung $z_0 + t(z - z_0)$ des Weges $[z_0, z]$:

$$\begin{aligned} F(z) - F(z_0) &= \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\,\mathrm{d}t \\ &= (z - z_0) \underbrace{\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t}_{=:\Delta(z)}. \end{aligned}$$

Es bleibt noch $\Delta(z)$ abzuschätzen: es gilt wegen der Stetigkeit von f in z_0 für $|z - z_0| < \delta$ (bzw. $|t(z - z_0)| < \delta_\varepsilon$):

$$\Big| \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\,\mathrm{d}t - f(z_0) \Big| \leq \int_0^1 \underbrace{|f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)|}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

$\square$

Analog beweist man

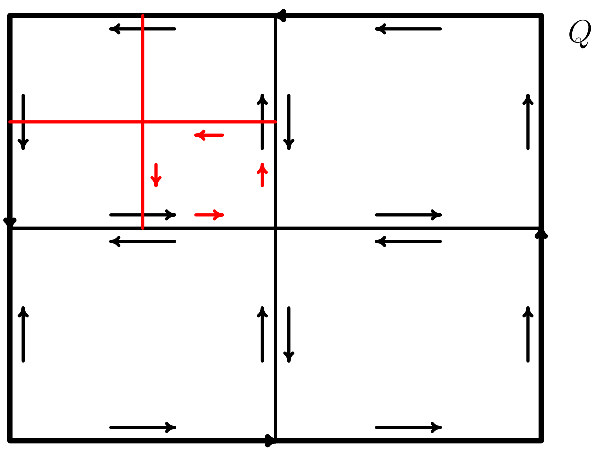
Satz 3.6 *Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset G$ gelte $\int_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.*

Satz 3.7 (Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $Q \subset U$ sei ein achsenparalleles Rechteck. γ sei die einfach geschlossene Integrationskurve, die ∂Q (im mathematisch positiven Sinne) parametrisiert. Dann gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Sei $f(z) = az + b$ mit $a, b \in \mathbb{C}$. Dann hat f die Stammfunktion $\frac{1}{2}az^2 + bz$, und $\int_\gamma f = 0$ ist erfüllt.

$\underline{\beta)}$ Der Beweis basiert auf dem folgenden Prinzip: Wir zerlegen Q in vier Teilrechtecke.



Die Teilrechtecke seien mit $q_1, \ldots, q_4$ bezeichnet; der Rand von q_i sei durch den Weg γ_i parametrisiert.
Da die im Inneren von Q verlaufenden Teile der Wege γ_i jeweils genau entgegengesetzt sind, ist in der folgenden Abschätzung die erste Gleichung erfüllt.

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le \sum_{i=1}^{4}\Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \le 4\Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|,$$

wobei γ_1 der Teilweg γ_i sei, bei dem

$$\Big|\int_{\gamma_i} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|$$

am größten ist. Das zugehörige Teilrechteck bezeichnen wir mit Q_1.

Induktiv erhalten wir auf diese Weise eine Folge $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ von Teilrechtecken mit Randkurven $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und

$$\Big|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq 4^n \Big|\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|. \tag{3.1}$$

Da $\operatorname{diam}(Q_n) \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$, folgt aus dem CANTORschen Schachtelsatz, dass die Rechtecke Q_n sich auf einen Punkt zusammenziehen; sei also

$$\{z_0\} := \bigcap_{n\geq 1} Q_n.$$

Nach Voraussetzung ist f in z_0 holomorph. Zu $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $\delta > 0$ mit

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \tag{3.2}$$

für $0 < |z - z_0| < \delta$. Diese Abschätzung machen wir uns im weiteren Verlauf zu Nutze, denn gleichzeitig gilt mit α):

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\big)\,\mathrm{d}z. \tag{3.3}$$

Seien ρ der Durchmesser und ℓ der Umfang von Q. Daraus folgt, dass Q_n den Durchmesser $2^{-n}\rho$ und den Umfang $2^{-n}\ell$ hat.
Wir wählen n nun groß genug, damit $2^{-n}\rho < \delta$ gilt und wenden (3.2) an. Daraus erhalten wir für (3.3) die Abschätzung

$$\Big|\int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)\big)\,\mathrm{d}z\Big| \leq L(\gamma_n)\varepsilon 2^{-n}\rho = \varepsilon 4^{-n}\rho\ell.$$

Fassen wir dies mit (3.1) zusammen, folgt

$$\Big|\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| < \varepsilon\rho\ell$$

für beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$, also

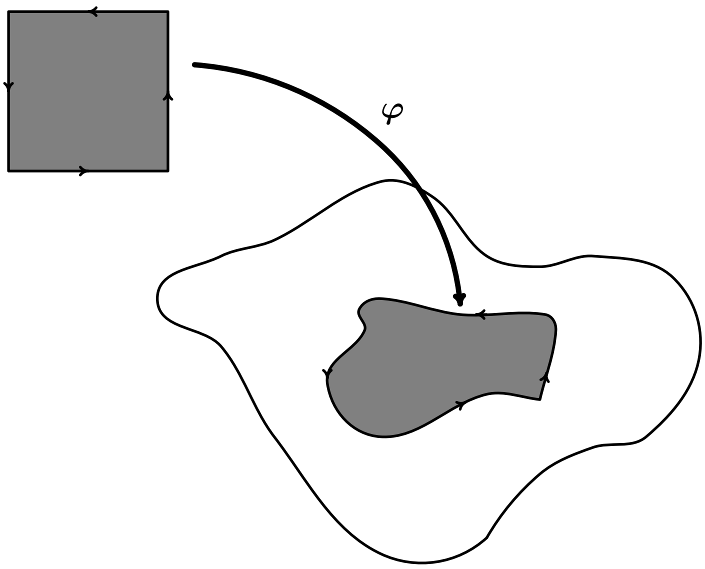
$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

□

Satz 3.8 (Cauchyscher Integralsatz für C^1–Bilder von Rechtecken) *Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $Q \subset \mathbb{C}$ ein abgeschlossenes achsenparalleles Rechteck, dessen Rand (im mathematisch positiven Sinne) durch γ parametrisiert werde. $\varphi : Q \to U$ sei reell stetig differenzierbar.*
Dann gilt

$$\int\limits_{\varphi(\gamma)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis:



$\underline{\alpha)}$ $f(z) = az + b$ ist offensichtlich (siehe oben).
$\underline{\beta)}$ Wir konstruieren wie oben eine Folge von Rechtecken $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots$ mit

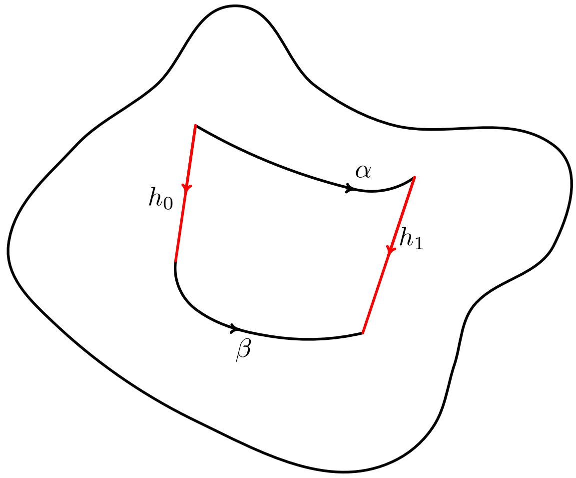
$$\Big|\int\limits_{\varphi\circ\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq 4^n \Big|\int\limits_{\varphi\circ\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z\Big|.$$

Da Q kompakt und φ stetig differenzierbar sind, ist $D\varphi$ auf Q gleichmäßig stetig, d. h. es existiert ein $c > 0$ mit $\|D\varphi(p)\| \leq c$ für alle $p \in Q$. Mit dem Mittelwertsatz folgt, dass der Durchmesser von $\varphi(Q_n)$ nicht größer als $\rho \cdot c \cdot 2^{-n}$ und die Länge von γ_n nicht größer als $\ell \cdot c \cdot 2^{-n}$ sind. □

Korollar 3.9 *Seien $\alpha, \beta : [t_0, t_1] \to U$ stetig differenzierbare Integrationswege, und liege*

$$\{(1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t); \tau \in [0,1]\}$$

in U für alle t. $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph.



Dann gilt

$$\int_{h_0} f + \int_\beta f - \int_{h_1} f - \int_\alpha f = 0, \tag{3.4}$$

wobei

$$h_1, h_2 : [0,1] \to U, h_i(\tau) := (1-\tau)\alpha(t_i) + \tau\beta(t_i).$$

Beweis: Die Abbildung

$$\varphi : [t_0, t_1] \times [0,1] \to \mathbb{C}, (t,\tau) \mapsto (1-\tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$$

ist stetig differenzierbar. Die Aussage folgt somit aus Satz 3.8. □

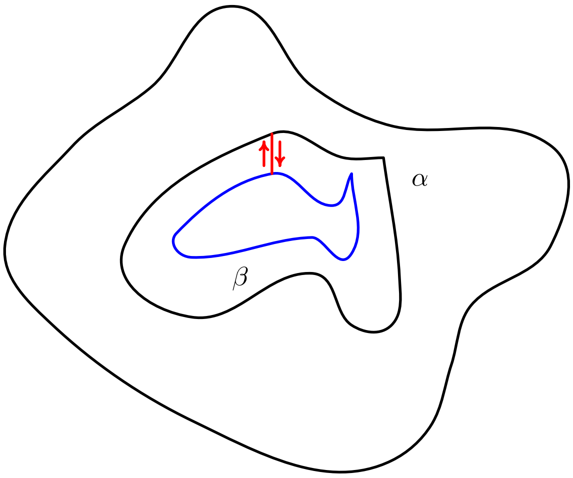
Beispiel 3.10 Spezialfälle hiervon sind:

1. Einfach geschlossene Dreiecke in U: α und β sind geradlinige Strecken und haben den gleichen Ausgangspunkt, h_0 besteht also nur aus einem Punkt, h_1 verbindet die Endpunkte. Es folgt:

   $$\int_\beta f - \int_\alpha f - \int_{h_1} f = 0;$$

   $\Delta := \beta h_1^{-1} \alpha^{-1}$ parametrisiert den Rand eines Dreiecks (in positiver Orientierung). Also gilt die Aussage des Cauchyschen Integralsatzes auch für Dreiecke.

2. α und β sind einfach geschlossene Kurven.



In diesem Fall ist $h_1 = h_0$, und Gleichung (3.4) vereinfacht sich zu $\int_\alpha f = \int_\beta f$. Insbesondere gilt dies für Kreise D_1, D_2 mit $\overline{D_2} \subset D_1$ und $\alpha = \partial D_1, \beta = \partial D_2$.

3. α und β haben Anfangs- und Endpunkt gemeinsam. Dann folgt ebenfalls $\int_\alpha f = \int_\beta f$.

3.2 Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz

Satz 3.11 (Cauchysche Integralformel für eine Kreisscheibe) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in U$, $r > 0$. Ferner gelte für die Kreisscheibe mit Radius r um z_0: $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph.*
Dann gilt für jedes $a \in U$ mit $|a - z_0| < r$:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z. \tag{3.5}$$

Beweis: Sei ρ hinreichend klein. Dann ist nach Beispiel 3.10

$$\int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z = \int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(z)}{z-a} \,\mathrm{d}z. \tag{3.6}$$

Es gilt auf $\kappa(\rho, a)$: $z = a + \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir haben also für das rechte Kurvenintegral in (3.6) die Parameterdarstellung

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\rho e^{\mathrm{i}\varphi} \mathrm{d}\varphi \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\varphi.$$

Setzen wir dies in (3.6) ein, ergibt sich

$$\int_{\kappa(\rho,a)} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(a+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi.$$

Wegen der Stetigkeit von f in a gilt für beliebige φ

$$|f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a))| < \varepsilon$$

für hinreichend kleines $r \leq \rho$. Wir haben also

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a))\,\mathrm{d}\varphi\Big| \leq 2\pi\varepsilon$$

und können errechnen

$$\int_0^{2\pi} f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})\,\mathrm{d}\varphi = \underbrace{\int_0^{2\pi} f(a)\,\mathrm{d}\varphi}_{=2\pi f(a)} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(f(a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) - f(a)\right)}_{\leq 2\pi\varepsilon}.$$

□

Satz 3.12 (Potenzreihenentwicklungssatz) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, $z_0 \in U$. Für $\rho > 0$ gelte $D_\rho(z_0) \subset U$.*
Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $\geq \rho$ und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \textit{für } |z-z_0 < \rho|.$$

Für die Koeffizienten gilt die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } 0 < r < \rho.$$

Ferner gilt die Cauchysche Integralformel für die n-te Ableitung*:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \textit{für } |z-z_0| < r. \tag{3.7}$$

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Wenn es eine solche Potenzreihe gibt, ist f beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

woraus die Eindeutigkeit folgt.

$\underline{\beta)}$ Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$ und $|z| < r < \rho$. Aus der CAUCHYschen Integralformel (3.5) folgt

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}}_{=\sum_{n=0}^{\infty}(z/\zeta)^n} \mathrm{d}\zeta \qquad (3.8) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \Big)}_{=:\, c_n} z^n
\end{aligned}
$$

Für festes z und ζ mit $|\zeta| = r$ konvergiert die Reihe in (3.8) gleichmäßig, was den letzten Schritt, die Vertauschung von Summation und Integration, rechtfertigt.

□

Es folgt unmittelbar hieraus:

Satz 3.13 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann ist f auf U beliebig oft differenzierbar.*

Ein solches Resultat ist im Reellen undenkbar; gewisse Konstrukte der reellen Analysis leben gerade davon, dass eine Funktion genau k mal differenzierbar ist, aber die k-te Ableitung in einem bestimmten Punkt unstetig. — Es sei etwa an VOLTERRAs Funktion erinnert, die differenzierbar, aber deren Ableitung nicht RIEMANN–integrierbar ist.

Satz 3.14 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Für ein geeignetes $r > 0$ und $z_0 \in U$ gelte $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Sei $|f(z)| \le M$ für alle z mit $|z - z_0| = r$, und sei $\sum_n c_n (z - z_0)^n$ die Potenzreihenentwicklung von f. Dann gilt $|c_n| \le M/r^n$*

Beweis:

$$|c_n| = \frac{1}{|2\pi\mathrm{i}|} \Big| \int_{\kappa(r,0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \Big| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r.$$

□

Satz 3.15 (Liouville) *Jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und sei $f(z) = \sum_n c_n z^n$. Es gilt nach Satz 3.14: $|c_n| \leq M/r^n$ für jedes $r > 0$. Damit folgt $f(z) \equiv c_0$. □

Aus dem Satz von LIOUVILLE erhalten wir einen eleganten Beweis für

Satz 3.16 (Fundamentalsatz der Algebra) *Jedes Polynom über* $\mathbb{C}$ *vom Grad* ≥ 1 *hat in* $\mathbb{C}$ *mindestens eine Nullstelle.*

Beweis: Sei $p = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Für $z \neq 0$ gilt damit

$$p(z) = z^n \underbrace{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right)}_{\longrightarrow a_n \ (|z| \to \infty)},$$

wobei das folgende asymptotische Verhalten verwendet wird: *Zu* $M \in \mathbb{R}_+$ *gibt es ein* $r > 0$*, so dass* $|p(z)| \geq M$ *für* $|z| \geq r$. (Beweis zur Übung.)
Nehmen wir an, dass p auf $\mathbb{C}$ keine Nullstelle hat. Dann ist $f(z) := 1/p(z)$ in ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Aufgrund der Asymptotik gilt $|f(z)| \to 0$ für $|z| \to \infty$. Da f beschränkt ist, ist diese Funktion nach dem Satz von LIOUVILLE konstant, also $f(z) \equiv c$. Damit folgt $p(z) \equiv c^{-1}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$. □

Satz 3.17 (Morera) $U \subset \mathbb{C}$ *sei offen,* $f : U \to \mathbb{C}$ *sei stetig. Für jedes abgeschlossene Dreieck* $\Delta \subset U$ *gelte* $\int_{\partial\Delta} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$*. Dann ist* f *auf* U *holomorph.*

Dieser Satz stellt also gewissermaßen die Umkehrung des CAUCHYschen Integralsatzes dar.

Beweis: Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist, reicht es zu zeigen, dass die Aussage des Satzes gilt, wenn U eine offene Kreisscheibe ist.
Die Voraussetzungen für Satz 3.6 sind erfüllt, daher besitzt f in U eine Stammfunktion F. F ist holomorph und somit beliebig oft komplex differenzierbar, also auch die Ableitung $f = F'$. □

Satz 3.18 (Weierstrass) $U \subset \mathbb{C}$ *sei offen,* $f_\nu : U \to \mathbb{C}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *seien holomorph, und die Folge* $\{f_\nu\}$ *konvergiere* lokal gleichmäßig *auf* U *(d. h. gleichmäßig auf kompakten Teilen von* U*) gegen die Funktion* f*. Dann ist* f *in* U *holomorph, und für alle* $n = 1, 2, \ldots$ *konvergiert* $\{f_\nu^{(n)}\}$ *lokal gleichmäßig gegen* $f^{(n)}$ *auf* U*.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ f sei stetig. Sei γ eine Parametrisierung des Randes eines Dreiecks in U. Es gilt

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\nu\to\infty} \underbrace{\int_\gamma f_\nu(z)\,\mathrm{d}z}_{=0 \text{ (Cauchy)}} = 0,$$

woraus aus dem Satz von Morera folgt, dass f in U holomorph ist.

$\underline{\beta)}$ Es reicht zu zeigen, dass $f'_\nu \to f'$ lokal gleichmäßig konvergiert; die höheren Ableitungen ergeben sich induktiv daraus, dass f'_ν und f' ihrerseits wieder holomorph sind.
Es gilt für $z_0 \in U$ und geeignetes $r > 0$

$$(f_\nu - f)'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z_0)} \frac{f_\nu(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

für alle $z \in$ U mit $|z - z_0| < r$. Es folgt für z mit $|z - z_0| < r/2$:

$$|f'_\nu(z) - f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \max_{|\zeta - z_0| < r/2} \underbrace{|f_\nu(\zeta) - f(\zeta)|}_{\longrightarrow 0\ (\nu\to\infty)},$$

die Konvergenz auf der rechten Seite wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_\nu \to f$ auf kompakten Teilen. □

Satz 3.19 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) *U sei im Teilraum $\{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im} z \ge 0\}$ des metrischen Raums $\mathbb{C}$ offen, und $U \cap \mathbb{R}$ enthalte ein offenes Intervall. $f : U \to \mathbb{C}$ sei stetig, und $f|_{\overset{\circ}{U}}$ sei holomorph. Ferner nehme f auf $U \cap \mathbb{R}$ nur reelle Werte an. Dann ist durch*

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(z), & z \in U \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \overline{U} \end{cases}$$

eine auf $U \cup \overline{U}$ holomorphe Funktion definiert.

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Zunächst zeigen wir, dass $\tilde{f}$ auf $\overset{\circ}{\overline{U}}$ holomorph ist:
Schreiben wir $f = g + \mathrm{i}h$ und $z = x + \mathrm{i}y$, so gilt

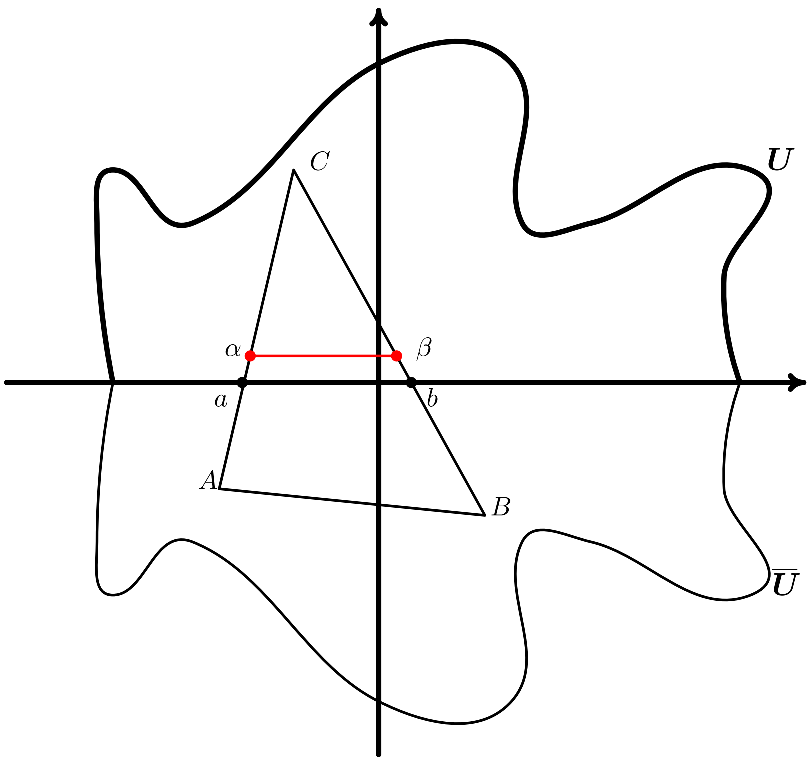
$$\tilde{f}(z) = g(x, -y) - \mathrm{i}h(x, -y) =: \tilde{g}(x, y) + \mathrm{i}\tilde{h}(x, y).$$

Offenbar sind $\tilde{g}$ und $\tilde{h}$ reell differenzierbar.

Es bleiben die CAUCHY–RIEMANNschen Differentialgleichungen nachzurechnen:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_x &= g_x(x,-y) = h_y(x,-y) = \tilde{h}_y \\ \tilde{g}_y &= -g_y(x,-y) = h_x(x,-y) = -\tilde{h}_x\end{aligned}$$

$\underline{\beta)}$ Um zu zeigen, dass sich $\tilde{f}$ analytisch von der oberen Halbebene auf die untere Halbebene forsetzen lässt, wenden wir wiederum den Satz von MORERA an.



Sei dazu $\gamma = [A, B, C, A]$ der Rand eines Dreieckes $\Delta \subset U \cup \overline{U}$.
Einzig interessant ist der Fall, wenn sowohl $\Delta \cap U \neq \emptyset$ als auch $\Delta \cap \overline{U} \neq \emptyset$ gilt — falls Δ komplett in der oberen oder unteren Halbebene liegen sollte und $\Delta \cap \mathbb{R} = \emptyset$ gilt, ist das Integral $\int_\gamma \tilde{f} = 0$, da $\tilde{f}$ nach Voraussetzung und nach α) außerhalb der Achsen holomorph ist.
O. B. d. A. liege der Punkt C in der oberen Halbebene, die Punkte A, B in der unteren — ansonsten betrachten wir die jeweils andere Halbebene; für den Fall, dass einer der Punkte auf der reellen Achse liegt, wird analog verfahren.
Seien a, b die Schnittpunkte der Kanten $[C, A]$ und $[B, C]$ mit der reellen Achse. Wir zeigen, dass das Integral von $\tilde{f}$ über den Streckenzug $\gamma' := [a, b, C, a]$ verschwindet — analog verfährt man bei dem Integral über $[A, B, b, a, A]$.

Auf dem abgeschlossenen Dreieck, das durch die Punkte a, b, C begrenzt wird, ist $\tilde{f}$ nach Voraussetzung stetig, also gleichmäßig stetig. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es somit ein $\delta > 0$, so dass $|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(z')| < \varepsilon$ für $|z - z'| < \delta$.
Seien α, β auf den Strecken $[C, a]$ bzw. $[b, C]$ so gewählt, dass $|\alpha - a| < \delta$ und $|\beta - b| < \delta$.
Das Dreieck $[\alpha, \beta, C, \alpha]$ liegt ganz in der oberen Halbebene, da $\tilde{f}$ dort holomorph ist, gilt

$$\int\limits_{\gamma'} \tilde{f} = \int\limits_{[a,b,\beta,\alpha,a]} \tilde{f}.$$

Nach Wahl von α und β ist für $0 \leq t \leq 1$

$$|t\beta + (1-t)\alpha - (tb + (1-t)a)| = |t(\beta - b) + (1-t)(\alpha - a)| < \delta,$$

also

$$|\tilde{f}(t\beta + (1 - t\alpha)) - \tilde{f}(tb + (1-t)a)| < \varepsilon.$$

Sei M das Maximum von $|\tilde{f}|$ auf dem Dreieck $\Delta_{a,b,C}$ und sei $\ell = L(\gamma')$.
Es folgt unmittelbar, dass $|\int_{[\alpha,a]} \tilde{f}| < M\delta$ und $|\int_{[b,\beta]} \tilde{f}| < M\delta$, also insgesamt

$$\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\gamma'} \tilde{f}\Big| &\leq 2M\delta + \Big|\int\limits_{[a,b]} \tilde{f} - \int\limits_{[\beta,\alpha]} \tilde{f}\Big| \\
&= 2M\delta + \Big|(b-a)\int\limits_0^1 \tilde{f}(tb + (1-t)a)\,\mathrm{d}t - (\beta - \alpha)\int\limits_0^1 \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq 2M\delta + |b-a|\Big|\int\limits_0^1 \big(\tilde{f}(tb + (1-t)a) - \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\quad + |(b-a) - (\beta - \alpha)|\Big|\int\limits_0^1 \tilde{f}(t\beta + (1-t)\alpha)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq 2M\delta + \varepsilon|b-a| + M|(b-\beta) + (\alpha - a)| \\
&\leq 4M\delta + \varepsilon\ell.
\end{aligned}$$

Da bei vorgegebenem ε auch $\delta < \varepsilon$ gewählt werden kann, wird das Integral $\int_{\gamma'} \tilde{f}$ betraglich beliebig klein. □

Definition 3.20 *Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und sei $f(z_0) = 0$. Unter der* Ordnung der Nullstelle *versteht man diejenige Zahl k (falls es eine solche gibt), für die $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0, f^{(k)} \neq 0$ und sonst ∞.*

Zum Beispiel hat die Funktion $f(z) = z^k$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung k.

Bemerkung:

1. Hat f in z_0 eine Nullstelle der Ordnung ∞, so verschwindet f identisch in einer Umgeung um z_0. Dies folgt unter anderem aus dem Potenzreihenentwicklungssatz:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$
2. g habe in z_0 eine einfache Nullstelle. Dann hat $f(z) = (g(z))^k$ in z_0 eine k-fache Nullstelle.

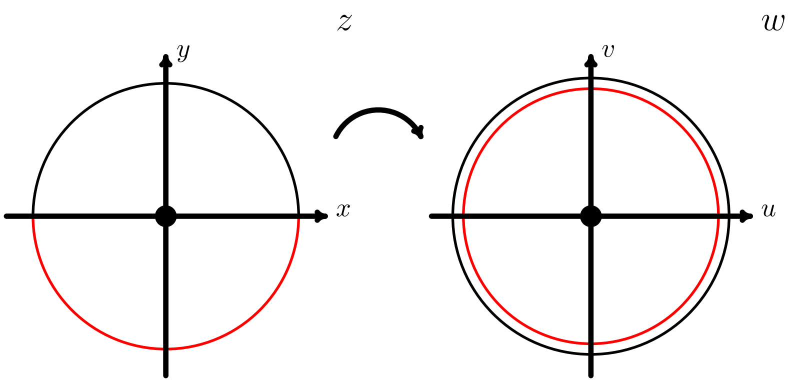
Satz 3.21 (Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe von Nullstellen) *Hat die Funktion f bei z_0 eine k-fache Nullstelle, so gibt es eine in einer Umgebung U_0 um z_0 holomorphe Funktion h mit einer einfachen Nullstelle in z_0 und*
$$f(z) = (h(z))^k \quad \textit{für } z \in U_0.$$

Beweis: Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$.
Nach Satz 3.12 gilt $f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n$ für $|z| < \rho$, wobei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.
Sei ohne Einschränkung $c_k = 1$ — ansonsten betrachten wir die Funktion $1/c_k\, f$.
Wir können also schreiben:
$$f(z) = z^k\Big(1 + \underbrace{\sum_{n=k+1}^{\infty} c_n z^n}_{=:g(z)}\Big).$$
Für die Funktion g können wir sofort erkennen: g ist holomorph, und $g(0) = 0$.
Die Idee ist nun, f in der folgenden Art zu schreiben:
$$f(z) = \Big(\underbrace{z + \sqrt[k]{1 + g(z)}}_{=:h(z)}\Big)^k.$$
Wegen $\sqrt[k]{1 + g(0)} \neq 0$ hätte h in 0 nur eine einfache Nullstelle.
Es bleibt die Frage, ob $\sqrt[k]{1 + g(z)}$ eine holomorphe Funktion ist.

⌈ Man vergleiche etwa: $\sqrt{z}$ ist in 0 nicht holomorph, denn $\sqrt{0} = 0$; ist m die Ordnung dieser Nullstelle, so hätte $(\sqrt{z})^2 = z$ in 0 eine Nullstelle der Ordnung $2m$. Aber die Funktion z hat im Nullpunkt eine Nullstelle erster Ordnung. ⌋

Es gilt aber folgende Aussage:
$1 + g(0) = 1$ und $\frac{\mathrm{d}z^k}{dz}\Big|_{z=1} = k \neq 0$. Mit dem aus der reellen Analysis bekannten Satz von der Umkehrfunktion[1] können wird folgern, dass $z \mapsto z^k$ lokal um den Punkt 1 ein Diffeomorphismus ist, also mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Betrachten wir also $z \mapsto z^k : U_1 \to U_2$ lokal in geeigneten Umgebungen U_1, U_2 um 1.
Sei $\chi := \sqrt[k]{\cdot}$ die zugehörige Umkehrfunktion.
Man wähle die Umgebung U_0 so klein, dass $(1 + g(z)) \in U_2$ für alle $z \in U_0$. Dann ist $\chi(1 + g(0)) = 1$, und $h(z) = z\chi(1 + g(z))$ hat in 0 eine einfache Nullstelle, und $f(z) = (h(z))^k$ in U_0. □

Wir haben im vorangegangenen Beweis die Umgebung um den Punkt 1 klein gewählt. In einer Umgebung um eine k-fache Nullstelle muss man sich nämlich auf ein anderes Verhalten einstellen. Betrachten wir als Beispiel die Funktion $z \mapsto z^2$ in einer Umgebung um den Nullpunkt.



Ist $z = Re^{\mathrm{i}\varphi}$, so ist $z^2 = R^2 e^{\mathrm{i}2\varphi} = (-z)^2$. Zu einem Punkt lassen sich also zwei Urbilder finden, abgesehen von der Nullstelle.
Allgemeiner gilt die folgende Aussage:

Satz 3.22 (Blätterzahl bei einer Nullstelle einer holomorphen Funktion) *Sei z_0 eine k–fache Nullstelle einer holomorphen Funktion f. Dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U_ε von z_0, die durch f auf*

[1] Oder dem Identitätssatz für Potenzreihen

die Kreisscheibe $\{w; |w| < \varepsilon\}$ abgebildet wird, und zwar so, dass $f|_{U_\varepsilon}$ jeden Wert w mit $0 < |w| < \varepsilon$ genau k mal und den Wert 0 genau einmal bei z_0 annimmt.

Beweis: Sei o. B. d. A. $z_0 = 0$.
$\underline{\alpha)}$ $f(z) = z^k$ ist verstanden; denn ist $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$, so existieren genau k Wurzeln

$$\sqrt[k]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi+2\pi m}{k}}, m = 0, 1, 2, \ldots, k,$$

woraus die Behauptung für einen Spezialfall folgt.

$\underline{\beta)}$ Aus Satz 3.21 folgt: es gibt eine lokal biholomorphe Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in einer Umgebung um 0, mit $h(0) = 0$, $h'(0) \neq 0$ und $f(z) = (h(z))^k$, d. h. es gibt Umgebungen U, V von 0, so dass $h|_U : U \to V$ bijektiv und holomorph ist und $(h|_U)^{-1}$ ebenfalls holomorph ist.
Sei ε so klein, dass $\{\zeta; |\zeta| < \sqrt[k]{\varepsilon}\} \subset V$, so hat

$$(h|_U)^{-1}(\{\zeta; |\zeta| < \sqrt[k]{\varepsilon}\}) =: U_\varepsilon$$

die gewünschte Eigenschaft. □

Satz 3.23 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet. $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien holomorph und stimmen auf einer Teilmenge von G, die mindestens einen Häufungspunkt in G enthält, überein. Dann gilt $f = g$ auf ganz G.*

Beweis: z_0 sei ein solcher Häufungspunkt. Dann hat $h = f - g$ bei z_0 eine Nullstelle unendlicher Ordnung. (Ansonsten gäbe es nach Satz 3.22 eine Umgebung von z_0, die keine weitere Nullstelle von h enthält. Nullstellen endlicher Ordnung liegen isoliert.)
Sie die Menge M definiert durch

$$M := \{z \in G; h \text{ hat in } z \text{ eine Nullstelle unendlicher Ordnung}\}.$$

Dann ist M offenbar nichtleer (denn $z_0 \in M$). Ferner ist M offen, denn nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gilt lokal um z_0

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \equiv 0.$$

Gleichzeitig ist auch $G \setminus M$ offen, denn falls es ein $p \in G \setminus M$ mit $h(p) \neq 0$ gibt, folgt aus der Stetigkeit von h, dass es eine volle Umgebung um p geben muss, wo h von Null verschieden ist.
Also: M ist nichtleer und offen und abgeschlossen in G. Da G zusammenhängend ist, folgt $M = G$. □

Aus diesem Satz folgt noch einmal unmittelbar der Identitätssatz für Potenzreihen.

Satz 3.24 (Gebietstreue) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(G)$ ebenfalls ein Gebiet.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ $f(G)$ ist zusammenhängend, da f stetig ist.

$\underline{\beta)}$ Sei $w_0 \in f(G)$, und gelte $w_0 = f(z_0)$. Wir definieren $h(z) := f(z) - w_0$.
Dann hat h in z_0 eine Nullstelle endlicher Ordnung; ansonsten wäre $h \equiv 0$ in einer Umgebung um z_0, also wäre nach Satz 3.23 $h \equiv 0$ auf G und somit f konstant — im Widerspruch zur Voraussetzung.
Nach Satz 3.22 existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass jedes w mit $|w| < \varepsilon$ von h — bzw. $w_0 + w$ von f — als Bild angenommen wird. Folglich ist $w_0 + D_\varepsilon(0) \subset f(G)$, also $f(G)$ offen. □

Satz 3.25 (Maximumprinzip) *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $f.G \to \mathbb{C}$ sei holomorph und nicht konstant. Dann kann f auf G kein Betragsmaximum haben.*

Beweis: Habe f auf G ein Betragsmaximum, also $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in G$ und ein bestimmtes z_0. Dann ist $f(G) \subset \{w; |w| \leq f(z_0)\}$. Mit anderen Worten: $f(z_0)$ liegt auf den Rand des Bildbereichs, im Widerspruch zur Offenheit von f. □

Korollar 3.26 *G sei ein beschränktes Gebiet, f auf G holomorph und auf $\overline{G}$ stetig. Dann wird das Maximum von $|f|$ über $\overline{G}$ auf ∂G angenommen:*

$$|f(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|, \quad z \in G.$$

Korollar 3.27 (Minimumsprinzip)
1. *$G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, und es existiere ein $c \in \mathbb{C}$ und eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ mit*

   $$\inf_{z \in U} |f(z)| = |f(c)|.$$

   Dann ist $f(c) = 0$ oder f in G konstant.

2. *Ist G ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig und auf G holomorph, dann hat f in G Nullstellen oder das Minimum von $|f|$ auf $\overline{G}$ wird in ∂G angenommen.*

Beweis:

1. Hat f keine Nullstellen in G, betrachtet man $1/f$ und verwendet das Maximumsprinzip und den Identitätssatz.
2. folgt unmittelbar aus Korollar 3.26.

$\square$

Satz 3.28 (Schwarzsches Lemma) *$f : D_1(0) \to D_1(0)$ sei holomorph mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle z und $|f'(0)| \leq 1$. Gilt an einer Stelle $z \neq 0$ $|f(z)| = |z|$ oder ist $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung: $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Nach dem Potenzreihenentwicklungssatz gilt:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}}_{=:g(z)} = z \cdot g(z).$$

Die Funktion g ist holomorph auf $D_1(0)$, und es ist $f'(0) = g(0)$.
Für $|z| < 1$ gilt

$$|f(z)| = |z||g(z)| = r|g(z)| \leq 1,$$

letzteres nach Voraussetzung.
Es folgt $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $r < 1$ und alle z mit $|z| = r$. Mit dem Maximumprinzip folgt, dass $|g(z)| \leq 1/r$ für alle $r < 1$ und alle z mit $|z| \leq r$. Lassen wir $r \to 1$ streben, folgt $|g(z) <\leq 1$ für alle z.
Gilt für ein $z \in D_1(0)$, dass $|g(z)| = 1$, folgt wiederum aus dem Maximumprinzip, dass g konstant ist, also dass $g \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ für ein geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

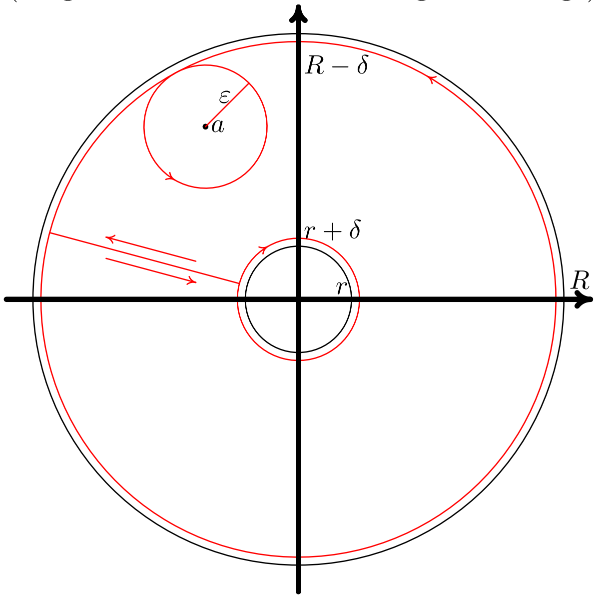
Satz 3.29 (Laurentreihenentwicklungssatz) *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph, und für $z_0 \in U$ und $0 \leq r < R$ sei $A := \{z; r < |z - z_0| < R\} \subset U$. Dann gilt für diesen Kreisring:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ mit } c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(\rho, z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z \text{ für } r < \rho < R. \tag{3.9}$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 0$.
Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt für jedes $a \in A$:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\kappa(\varepsilon, a)} \frac{f(z)}{z - a} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(R-\delta, 0)} \frac{f(z)}{z - a} \,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\kappa(r+\delta, 0)} \frac{f(z)}{a - z} \,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(vergleiche die Skizze des Integrationswegs).



Wie im Beweis des Potenzriehenentwicklungssatzes (Satz 3.12) wird das erste Integral zu einer geometrischen Reihe in $\frac{a}{z}$ für $|z| = R - \delta$ umgeformt, das zweite Integral in eine geometrische Reihe in $\frac{z}{a}$ für $|z| = r + \delta$. □

3.3 Isolierte Singularitäten

Definition 3.30 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $z_0 \in U$. Ist $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so nennt man z_0 eine* isolierte Singularität *von f.*

Wir unterscheiden die folgenden drei Arten von Singularitäten:

Definition 3.31 *Seien U, z_0, f wie zuvor.*

1. *z_0 heißt* hebbare Singularität *von f, falls sich f durch geeignete Definition zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fortsetzen lässt.*

2. *z_0 heißt* Pol *von f, wenn z_0 nicht hebbar ist, aber ein $\mathbb{N} \ni m \geq 1$ existiert, so dass $(z-z_0)^m f$ in z_0 eine hebbare Singularität besitzt. Das kleinste solche m nennt man die* Ordnung *der Polstelle.*

3. *Ist die Singularität weder hebbar noch Pol, so nennt man sie* wesentlich.

Wir illustrieren diese Begriffe sogleich mit Standardbeispielen:

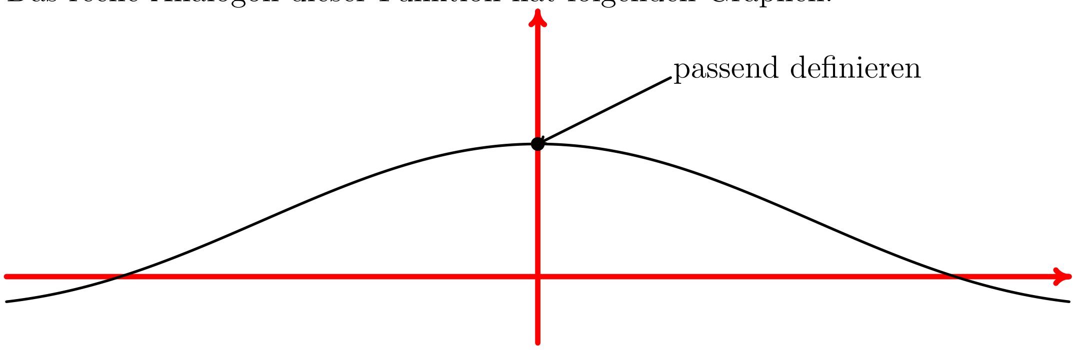
Beispiel 3.32 Beispiel für eine Funktion mit hebbarer Singularität ist

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, \, z \neq 0 \\ 1, \, z = 0 \end{cases}$$

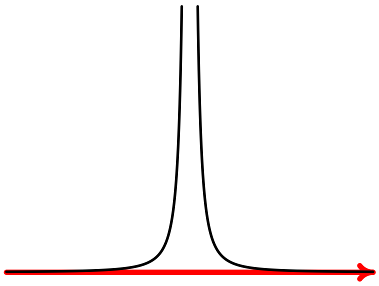
Die Potenzreihenentwicklung dieser Funktion um 0 ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

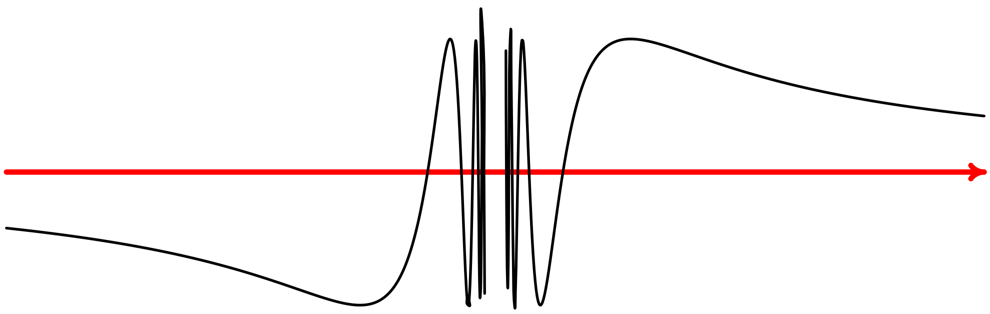
Das reelle Analogon dieser Funktion hat folgenden Graphen:



Eine Polstelle findet sich bei der Funktion $f(z) = z^{-2}$ im Punkt 0. Die Ordnung dieser Polstelle ist offensichtlich 2.



Als Beispiel für eine wesentliche Singularität betrachten wir die Funktion $f(z) = \sin(1/z)$. Das Verhalten dieser Funktion um den Nullpunkt herum ist reichlich chaotisch, wie schon der Blick auf den Graphen des reellen Analogons $\sin(1/x)$ zeigt:



Im Komplexen kommt zu der wilden Oszillation hinzu, dass die Sinusfunktion — im Gegensatz zum reellen Sinus — nicht beschränkt ist (was uns der Satz von LIOUVILLE lehrt).
Das Verhalten einer Funktion in der Nähe wesentlicher Singularitäten werden wir weiter unten näher studieren.

Beispiel 3.33

1. $U \subset \mathbb{C}$ sei offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann sind offenbar alle $z_0 \in U$ hebbar.

2. Sei $U = \mathbb{C}$, und sei
$$f(z) := \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}} = z + \mathrm{i}.$$
Diese Funktion hat in $z_0 = \mathrm{i}$ eine hebbare Singularität.

3. Sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) \neq 0$, ferner sei $\mathbb{N} \ni m \geq 1$. Dann hat die Funktion
$$g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)^m}$$
in z_0 einen Pol m-ter Ordnung.

4. Umgekehrt: hat $g : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ in z_0 einen Pol m-ter Ordnung, dann gibt es eine auf U holomorphe Funktion f mit $f(z_0) \neq 0$, so dass $g(z) = f(z)/(z-z_0)^m$, denn nach Voraussetzung ist $(z-z_0)^m g$ zu einer holomorphen Funktion f ergänzbar. Wäre $f(z_0) = 0$, wäre auch
$$(z-z_0)^{m-1} g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$$
in z_0 holomorph, also m nicht die Ordnung der Polstelle.

Besonders interessant im Zusammenhang mit Polstellen ist auch die Berechnung des Residuums. Zur Erinnerung: wenn wir die Funktion f in eine LAURENTreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ entwickeln, ist das Residuum der Koeffizient a_{-1}. Ist z_0 eine Polstelle von f, erhalten wir folgende Formeln für $\mathrm{res}_{z_0} f$:

1. Ist z_0 ein Pol erster Ordnung, gilt
$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z). \tag{3.10}$$

2. Ist g in z_0 holomorph und hat f dort einen Pol erster Ordnung, gilt

   $$\mathrm{res}_{z_0}(gf) = g(z_0)\mathrm{res}_{z_0} f. \tag{3.11}$$

3. Hat h in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt

   $$\mathrm{res}_{z_0}\frac{1}{h} = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)}. \tag{3.12}$$

   Ist zusätzlich g in z_0 holomorph, gilt

   $$\mathrm{res}_{z_0}\frac{g}{h} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \tag{3.13}$$

4. Hat f in z_0 einen Pol n-ter Ordnung, gilt mit $g(z) = (z-z_0)^n f(z)$

   $$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0), \tag{3.14}$$

   denn

   $$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\ ;$$

   um an a_{-1} heranzukommen, muss $(z-z_0)^n f$ also $(n-1)$–mal abgeleitet werden.

Definition 3.34 *Ist f auf U bis auf Pole holomorph, so nennt man f* meromorph *in U.*

Meromorphe Funktionen lassen sich lokal als Quotient holomorpher Funktionen schreiben, also $f(z) = g(z)/h(z)$.
Umgekehrt: sind g und h holomorphe Funktionen auf dem Gebiet G und ist $h \not\equiv 0$, dann ist die Funktion f die aus g/h nach Hebung aller hebbaren Singularitäten in G hervorgeht, meromorph.

Beweis: Sei $z_0 \in G$. Ist $h(z_0) \neq 0$, so ist f holomorph bei z_0.
Ist $h(z_0) = 0$ so gilt für ein $n \geq 1$: $h(z) = (z-z_0)^n\tilde{h}(z)$ mit $h(z) \neq 0$ auf $\{z; |z-z_0| < \varepsilon\}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.
Desgleichen: $g(z) = (z-z_0)^k\tilde{g}(z)$, $k \geq 0$ mit $\tilde{g}(z_0) \neq 0$. Dann ist

$$f(z) = (z-z_0)^{k-n}\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}.$$

□

Bezeichnung: Sei f meromorph auf U. Mit N_f bezeichnen wir die Menge der Nullstellen von f in U, mit D_f die Menge der Pole von f in U.

Lemma 3.35 *Ist f meromorph im Gebiet G und f nicht konstant 0. Dann kann weder D_f noch N_f einen Häufungspunkt in G haben.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ Sei $z_0 \in G$ ein Pol. Dann kann z_0 kein Häufungspunkt sein von Polen sein, denn diese liegen isoliert.
Ist f in z_0 holomorph, so kann z_0 ebenfalls kein Häufungspunkt von Polen sein, denn f ist in einer vollen Umgebung um z_0 differenzierbar.
Zusammengefasst: D_f hat keinen Häufungspunkt in G.

$\underline{\beta)}$ Nehmen wir an, $z_0 \in G$ wäre ein Häufungspunkt von N_f. Dann ist z_0 kein Pol, denn sonst wäre $f(z) = g(z)(z - z_0)^{-m}$ mit $g(z_0) \neq 0$. $\Rightarrow f(z) \neq 0$ für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ (ε hinreichend klein), im Widerspruch dazu, dass z_0 Häufungspunkt von N_f ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $G \setminus D_f$ ein Gebiet ist.

Hilfssatz 3.36 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subset G$, und M habe keine Häufungspunkte. Dann ist $G \setminus M$ ein Gebiet.*

Beweis des Hilfssatzes: $\underline{\alpha)}$ $y \in G \setminus M$ besitze keine Umgebung in $G \setminus M$. $\Rightarrow y$ ist Häufungspunkt von M. Widerspruch!
Also ist $G \setminus M$ offen.

$\underline{\beta)}$ Z. z.: $G \setminus M$ ist zusammenhängend.
Dazu seien $p, q \in G$. Man wählt eine stetige Kurve $\alpha : [0, 1] \to G$ mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$. Dann ist $\alpha([0, 1]) \subset G$ kompakt, also existieren nur endlich viele Punkte von M auf $\alpha([0, 1])$.

⌈ Nach Voraussetzung hat M in G keine Häufungspunkte. Für $y \in M$ liegt also die Kreisscheibe $D_{\varepsilon_1}(y)$ ganz in $(G \setminus M) \cup \{y\}$.
Wir überdecken nun $\alpha([0, 1])$ mit Kreisscheiben $D_{\varepsilon_2}(\alpha(t))$, $t \in [0, 1]$. Da $\alpha([0, 1])$ kompakt ist, reichen endliche viele dieser Kreisscheiben zur Überdeckung aus. Folglich ist jedes $y \in \alpha([0, 1]) \cap M$ in einer Kreisscheibe $D_{\varepsilon_2}(y_j)$ enthalten. Ist ε_2 klein genug, ist $D_{\varepsilon_2}(y) \subset D_{\varepsilon_1}(y)$ und somit ganz in $(G \setminus M) \cup \{y\}$.
Es können also nur endlich viele Punkte aus M in $\alpha([0, 1])$ liegen, da $\alpha([0, 1])$ vor nur endlich vielen $D_{\varepsilon_2}(y_j)$ überdeckt wird. ⌋

Sei nun $z_0 \in \alpha([0, 1]) \cap M$. Man wähle $\varepsilon > 0$ mit $\overline{D_\varepsilon(z_0)} \subset (G \setminus M) \cup \{y\}$.
Setze $t_0 := \inf\{t; |\alpha(t) - z_0| = \varepsilon\}$, $t_1 := \sup\{t; |\alpha(t) - z_0| = \varepsilon\}$ und ersetze $\alpha|_{[t_0, t_1]}$ durch einen Weg in $\{z; 0 < |z - z_0| \leq \varepsilon\}$. ◇

□

Bemerkung: G sei ein Gebiet, und $f, g : G \to \mathbb{C}$ seien meromorph. Dann sind $f \pm g$ und $f \cdot g$ auf $G \setminus (D_f \cup D_g)$ definiert. Auf diese Weise wird

$$\mathscr{M}(G) := \{f : G \to \mathbb{C}; f \text{ in } G \text{ meromorph}\}$$

offensichtlich zu einer $\mathbb{C}$–Algebra.
Etwas weniger offensichtlich ist, dass $\mathscr{M}(G)$ mit punktweiser Division sogar ein Körper ist.
Dazu macht man sich folgendes klar: Ist $g \in \mathscr{M}(G)$, und nicht identisch 0, so hat N_g nach Lemma 3.35 keinen Häufungspunkt. Demzufolge hat die Menge $D_{1/g}$ keinen Häufungspunkt in G. Die Funktion $1/g$ ist also auf dem *Gebiet* $G \setminus N_g$ holomorph.

Dass die Nullstellen bei einer isolierten *wesentlichen* Singularität sehr wohl einen Häufungspunkt besitzen können, soll das Beispiel der Funktion $\sin(1/z) : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ verdeutlichen: Die Nullstellen des Sinus sind die Punkte $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Dementsprechend hat die Funktion $z \mapsto \sin(1/z)$ Nullstellen an $\frac{1}{\mathbb{Z}\pi}$, und diese Menge hat in 0 einen Häufungspunkt.

Bemerkung: f habe in z_0 eine isolierte Singularität. Wir können mit Hilfe der LAURENTreihe von f um z_0 die Singularität folgendermaßen charakterisieren:

1. f ist hebbar in z_0 $\iff$ der Hauptteil $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$ ist Null.

2. z_0 ist ein Pol $\iff$ der Hauptteil von f in z_0 ist von der Form $\sum_{n=1}^{k} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$.

3. z_0 ist eine wesentliche Singularität $\iff$ der Hauptteil hat unendlich viele Summanden: $c_n \neq 0$ für unendlich viele $-\infty \leq n \leq -1$.

Für hebbare Singularitäten haben wir ferner die folgende Eigenschaft:

Satz 3.37 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Sei z_0 eine isolierte Singularität von f, und sei f in einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt (d. h. es gibt ein $\varepsilon > 0$ und $M > 0$, so dass $|f(z)| \leq M$ für alle z mit $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$). Dann ist f in z_0 hebbar.*

Beweis: Sei r hinreichend klein.
Wir schreiben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ mit } c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

Es folgt:

(3.15) $|c_n| \le \dfrac{M}{r^n}$ (CAUCHYsche Ungleichung für LAURENTentwicklungen).

Ist $n < 0$, gilt $|c_n| \le Mr^{|n|}$ für beliebiges r. Wir können r beliebig klein wählen und erhalten so $c_n = 0$ für alle $n < 0$. □

Den Abschluss des Abschnitts bildet eine Aussage, die sich eingehender mit dem Verhalten an einer wesentlichen Singularität befasst:

Satz 3.38 (Casorati–Weierstrass) *Sei z_0 eine wesentliche Singularität von f, und sei $\varepsilon > 0$ klein genug, dass f auf der punktierten Umgebung $\{z; 0 < |z-z_0| < \varepsilon\}$ holomorph ist.*
Dann ist $\{w = f(z); 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage indirekt: Nehmen wir an, es gäbe ein $\delta > 0$ und ein $w_0 \in \mathbb{C}$, so dass $\{w; |w-w_0| < \delta\}$ keine Punkte des Bildes von $D_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ enthält.
Betrachten wir die Funktion $h(z) := 1/(f(z) - w_0)$. Da f holomorph auf $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist und $|f(z) - w_0| > \delta$ für $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ gilt, ist h auf $D_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph und beschränkt. Aus Satz 3.37 folgt, dass h in z_0 eine hebbare Singularität hat.
Da h nicht konstant 0 ist, kann $1/h$ höchstens eine Polstelle endlicher Ordnung haben. Es folgt: $f(z) = 1/h(z) + w_0$ hat in z_0 eine Polstelle oder hebbare Singularität, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass die Singularität wesentlich ist. □

Bemerkung: Der Satz von CASORATI–WEIERSTRASS kann noch verschärft werden: *Hat die Funktion f an z_0 eine wesentliche Singularität, dann nimmt f in jeder punktierten Umgebung um z_0 jede komplexe Zahl — mit höchstens einer Ausnahme — unendlich oft als Wert an.*
Diese Aussage ist auch als der (große) Satz von PICARD bekannt. Die Ausnahme eines Punktes tritt etwa bei der Funktion $\mathrm{e}^{1/z}$ auf: hier wird jede punktierte Umgebung $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ auf $\mathbb{C}^\times$ abgebildet.

3.4 Nachtrag: Lokal konstante Funktionen und Zusammenhang

Im Folgenden sei X ein metrischer Raum.

Definition 3.39 *$f : X \to \mathbb{C}$ heißt* lokal konstant, *wenn jedes $x \in X$ in einer Umgebung $U \subset X$ liegt mit der Eigenschaft, dass $f|_U$ konstant ist.*

Satz 3.40 *X sei ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:*

1. *Jede lokal konstante Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist konstant.*
2. *Die einzige nichtleere Teilmenge von X, die gleichzeitig offen und abgeschlossen („clopen") ist, ist X.*

Beweis: „$1 \Longrightarrow 2$" Sei $A \subset X$ nichtleer, offen und abgeschlossen. Es folgt: $\mathbf{1}_A$ ist lokal konstant $\Rightarrow$ $\mathbf{1}_A$ ist konstant $\Rightarrow$ $A = X$.

„$2 \Longrightarrow 1$" Seien $c \in X$ und $f : X \to \mathbb{C}$ lokal konstant. Wir setzen $A := \overset{-1}{f}(\{f(c)\})$.
Dann ist $A \neq \emptyset$, denn es gilt $c \in A$.
A ist offen, denn: f ist lokal konstant, somit gilt für alle Punkte x in einer Umgebung von c, dass $f(x) = f(c)$, also ist auch $x \in A$.
A ist abgeschlossen, denn f ist stetig, und A ist das Urbild einer abgeschlossenen Menge.
Nach Voraussetzung ist damit $A = X$. Also ist $f(x) = f(c)$ für alle $x \in X$. □

Definition 3.41 *Wir sagen X ist* zusammenhängend, *wenn Eigenschaft 2 aus dem Satz erfüllt ist.*

Auf diese Weise wird der Zusammenhangsbegriff rein topologisch definiert.

Satz 3.42 *$D \subset \mathbb{C}$ sei offen. Dann sind äquivalent:*

1. *D ist zusammenhängend.*
2. *Zu jedem Punktepaar $p, q \in D$ existiert ein achsparalleler Polygonzug $P \subset D$ von p nach q.*
3. *D ist wegzusammenhängend, d. h. zu jedem Paar $p, q \in D$ gibt es einen Integrationsweg von p nach q in D.*

Beweis: „3 $\Longrightarrow$ 1“: Diese Aussage gilt auch in beliebigen metrischen Räumen. $D \supset U \neq \emptyset$ sei offen und abgeschlossen, $p \in U$ sei fest, $q \in D$. Nach Voraussetzung existiert ein Weg $\gamma : [a, b] \to D$, der p und q verbindet. γ ist stetig $\Rightarrow \overset{-1}{\gamma}(U)$ ist offen, abgeschlossen und nicht leer. Allerdings ist $\overset{-1}{\gamma}(U) = [a, b]$, folglich gilt $q = \gamma(b) \in U$. Also: $U = D$.

„1 $\Longrightarrow$ 2“: Sei $p \in D$. $f : D \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$f(w) := \begin{cases} 1, \text{ Polygonzug von } p \text{ nach } w \text{ in } D \text{ existiert} \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

f ist lokal konstant. Nach Satz 3.40 ist f konstant auf D; es bleibt zu ermitteln, ob $f \equiv 0$ oder $f \equiv 1$ auf D. Es ist allerdings $f(p) = 1$.

„2 $\Longrightarrow$ 3“: trivial. $\square$

Kapitel 4

Der globale Cauchysche Integralsatz

Die Ergebnisse, die wir im vorigen Kapitel gewonnen haben, leben in der Regel davon, dass über einfach geschlossene Kurven integriert wird. Wie sich die Aussagen verhalten, wenn wir zulassen, dass ein Weg auch mehrfach oder in umgekehrter Richtung durchlaufen werden darf, ist Gegenstand dieses Kapitels.
Ausgehend davon, dass wir schon bisher Integrale über zusammengsetzte Wege als die Summe der einzelnen Wegintegrale definiert haben, führen wir einige explizite Rechenvorschriften ein, wie Wege addiert werden können.

Definition 4.1 *Eine* Kette *in $U \subset \mathbb{C}$ ist eine Abbildung Γ der Menge der Integrationswege in U in die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, die nur auf endlich vielen Wegen einen von Null verschiedenen Wert hat.*

Bemerkung: Ketten bilden mit der üblichen Addition $\mathbb{Z}$–wertiger Funktionen eine Abelsche Gruppe.

Identifizieren wir den Integrationsweg γ mit der Kette, die nur auf γ den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat, so bezeichnen wir die Kette auch mit γ.
Jede Kette ist endliche Linearkombination von Integrationswegen:

$$\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell, \quad n_\ell \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 \\ \Gamma_1 &= 2\gamma_2 - \gamma_3 + 5\gamma_4 \\ \Gamma_1 + \Gamma_2 &= \gamma_1 + 2\gamma_3 + 5\gamma_4 \end{aligned}$$

Bezeichnung: Ist $\Gamma = \sum_\ell n_\ell \gamma_\ell$, nennen wir $Sp\Gamma = \bigcup_{n_\ell \neq 0} Sp(\gamma_\ell)$ die Spur von Γ.
Ist $f : Sp(\Gamma) \to \mathbb{C}$ stetig, setzen wir

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z := \sum_\ell n_\ell \int_{\gamma_\ell} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Wir können sofort feststellen, dass für Integrale über Ketten folgende Aussagen gelten:

1. $$\Big|\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq \max_{z \in Sp\Gamma} |f(z)| \sum_\ell |n_\ell| L(\gamma_\ell),$$

2. Ist $f : Sp\Gamma_1 \cup Sp\Gamma_2 \to \mathbb{C}$ stetig, gilt

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f.$$

Definition 4.2 *Eine Kette* $\Gamma = \sum_{\ell=1}^k n_\ell \gamma_\ell$ *heißt* geschlossen *oder* Zyklus, *wenn jeder Punkt* $z \in \mathbb{C}$ *unter Berücksichtigung der Vielfachheit* n_ℓ *genau so oft Anfangs- wie Endpunkt eines* γ_ℓ *ist.*

Beispiel 4.3

1. Jeder geschlossene Integrationsweg ist ein Zyklus; ebenso jede Linearkombination von geschlossenen Wegen (etwa Randkurven von positiv berandeten Gebieten).

2. Ist γ ein Integrationsweg, so ist $\gamma + \gamma^{-1}$ ein Zyklus.

3. Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ Integrationswege, die zu einem geschlossenen Weg $\gamma_1 \cdots \gamma_k$ zusammengesetzt werden können, dann ist $\gamma_1 + \ldots + \gamma_k$ ein Zyklus.

Satz 4.4 $G \subset \mathbb{C}$ *sei ein Gebiet,* $f : G \to \mathbb{C}$ *sei stetig.* f *besitzt genau dann auf* G *eine Stammfunktion, wenn für alle Zyklen* Γ *in* G *gilt:*

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis: „$\Leftarrow$“: Dies ist die Aussage von Satz 3.5.
„$\Rightarrow$“: F sei Stammfunktion von f auf G, und $\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell$ sei ein Zyklus.

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \int_{\gamma_\ell} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \big(F(E(\gamma_\ell)) - F(A(\gamma_\ell))\big) \\
&= \sum_z \underbrace{\Bigg(\sum_{\substack{\ell=1 \\ z=E(\gamma_\ell)}}^{k} n_\ell - \sum_{\substack{\lambda=1 \\ z=E(\gamma_\lambda)}}^{k} n_\lambda \Bigg)}_{=0,\text{ da }\Gamma\text{ Zyklus}} F(z).
\end{aligned}$$

□

Definition 4.5 Γ *sei ein Zyklus. Für* $z \in \mathbb{C} \setminus Sp(\gamma)$ *definieren wir die* Umlaufszahl *von* Γ *bezüglich* z *durch*

$$n(\Gamma, z) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

Der Vorteil dieser Definition ist, dass wir uns von der geometrischen Anschauung trennen.
Für die Umlaufszahl können wir sofort feststellen:

$$\begin{aligned}
n(\Gamma_1 + \Gamma_2, z) &= n(\Gamma_1, z) + n(\Gamma_2, z), \\
n(-\Gamma, z) &= -n(\Gamma, z).
\end{aligned}$$

Beispiel 4.6

1. Sei $\gamma(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}$, $0 \le t \le 2\pi$. Dann ist

   $$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} \mathrm{i}m\,\mathrm{d}t = m.$$

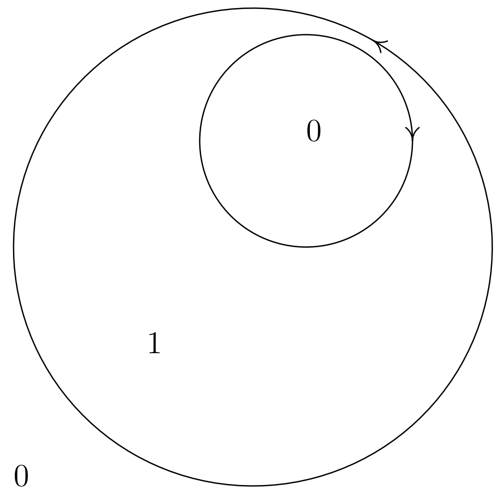
   Für $|z - z_0| < r$ deckt sich dies mit unserer geometrischen Vorstellung der Umlaufszahl.

   Ist $|z - z_0| > r$, also $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D_r(z_0)}$, gilt

   $$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

   denn die Funktion $\zeta \mapsto 1/(\zeta - z)$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ holomorph, und γ liegt ganz in einer der Halbebenen $\{\mathrm{Im}\zeta > \mathrm{Im}z\}$, $\{\mathrm{Im}\zeta < \mathrm{Im}z\}$.

2. Sei $\Gamma := \kappa(R, z_0) - \kappa(r, z_1)$, wobei $\overline{D_r(z_1)} \subset D_R(z_0)$.



Dann ist

$$n(\Gamma, z) = \begin{cases} 1 & , \ z \in D_R(z_0) \setminus \overline{D_r(z_1)} \\ 0 & , \ |z - z_1| < r \vee |z - z_0| > R \end{cases}$$

Satz 4.7 *Es seien Γ ein Zyklus und $z \in \mathbb{C} \setminus Sp(\Gamma)$. Dann ist $n(\Gamma, z)$ eine ganze Zahl.*

Beweis: Sei $\Gamma = \sum_{\ell=1}^{k} n_\ell \gamma_\ell$ mit Wegen $\gamma_\ell : [0,1] \to \mathbb{C}$ (dies erreicht man durch eventuelles Umparametrisieren).
Für $t \in [0,1]$ definieren wir

$$h(t) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \sum_\ell n_\ell \int_0^t \frac{\gamma_\ell'(s)}{\gamma_\ell(s) - z} \,\mathrm{d}s.$$

Es gilt $h(0) = 0$ und $h(1) = n(\Gamma, z)$. Wir wollen zeigen: $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(1)} = 1$, woraus folgt, dass $h(1) = n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$.
h ist stückweise differenzierbar. Folglich ist auch

$$g(t) := \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}h(t)} \prod_\ell (\gamma_\ell(t) - z)^{n_\ell}$$

stückweise differenzierbar mit Ableitung

$$g'(t) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}h(t)} \prod_\ell (\gamma_\ell(t) - z)^{n_\ell} \cdot \dots \cdot \underbrace{\Big(- 2\pi\mathrm{i}h'(t) + \sum_\lambda \frac{n_\lambda \gamma_\lambda'(t)}{\gamma_\lambda(t) - z} \Big)}_{=0}.$$

Da g auf $[0,1]$ stetig ist, folgt: g ist auf $[0,1]$ konstant.
Es gibt also ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$\underbrace{\prod_{\ell}(\gamma_\ell(t)-z)^{n_\ell}}_{(z\notin Sp\Gamma)\to\neq 0} = c\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(t)} \Rightarrow c \neq 0.$$

Falls

$$\prod_{\ell=1}^{k}(\gamma_\ell(0)-z)^{n_\ell} = \prod_{\ell=1}^{k}(\gamma_\ell(1)-z)^{n_\ell}, \tag{4.1}$$

ist $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(0)} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}h(0)} = 1$, da $h(0)=0$.
Ist w ein Punkt, der als Anfangs- oder Endpunkt eines γ_ℓ auftritt, so gilt

$$\sum_{w=\gamma_\ell(0)} n_\ell = \sum_{w=\gamma_\ell(1)}$$

(Γ ist ein Zyklus!). $w-z$ kommt in (4.1) auf beiden Seiten gleich oft vor. Also gilt (4.1). □

Satz 4.8 $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *sei ein Zyklus. Dann ist* $\mathbb{C} \setminus Sp\Gamma \ni z \mapsto n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ *auf jeder Wegkomponente konstant und auf der unbeschränkten Komponente gleich Null.*

Beweis: $\underline{\alpha)}$ $z \mapsto n(\Gamma, z)$ ist stetig, bildet also zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{C}$ in zusammenhängende Teilmengen von $\mathbb{Z}$ ab. Folglich ist $n(\Gamma, z)$ auf jeder Wegkomponente konstant.

$\underline{\beta)}$ $Sp\Gamma$ ist kompakt, also existiert ein $R > 0$ mit $Sp\Gamma \subset \overline{D_R(0)}$. Mithin ist $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ offen, zusammenhängend und zu $Sp\Gamma$ disjunkt. Es gibt also genau eine Wegkomponente von $\mathbb{C} \setminus Sp\Gamma$, die $\mathbb{C} \setminus \overline{D_R(0)}$ enthält; dies ist die einzige unbeschränkte Wegkomponente.
Sei $\{z_\nu\}$ eine Folge in dieser Wegkomponente mit $\operatorname{dist}(z_\nu, Sp\Gamma) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.
Dann gilt

$$n(\Gamma, z_\nu) = \sum_{\ell=1}^{k} \frac{n_\ell}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_\ell} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_\nu} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

denn

$$\left| \int_{\gamma_\ell} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_\nu} \right| \leq L(\gamma_\ell) \frac{1}{\operatorname{dist}(z_\nu, \Gamma)} \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

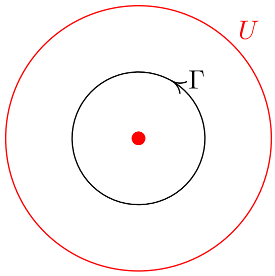
Definition 4.9 *Ein Zyklus* Γ *in einer offenen Teilmenge* $U \subset \mathbb{C}$ *heißt* nullhomolog, *wenn für jeden Punkt* $z \in U^{\complement}$ *die Umlaufzahl* $n(\Gamma, z) = 0$ *ist.*
Zwei Zyklen heißen homolog, *wenn ihre Differenz nullhomolog ist.*

Bildlich gesprochen bedeutet dies, dass sich der Zyklus auf einen Punkt zusammen ziehen lässt.

Beispiel 4.10

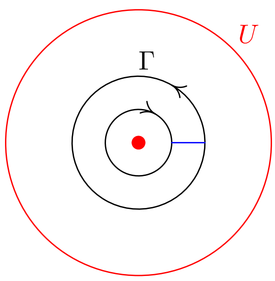
1. Sei $U = B_2(0)$, $\Gamma = \kappa(1, 0)$ Für jeden Punkt $z \in U^{\complement}$ ist $n(\Gamma, z) = 0$. Dieser Zyklus ist nullhomolog.

2. Sei $U = B_2(0) \setminus \{0\}$, wie zuvor sei $\Gamma = \kappa(1, 0)$. Dieser Zyklus ist nicht nullhomolog, denn $n(\Gamma, 0) = 1$.



Bildlich: dieser Zyklus lässt ich nicht auf einen Punkt in U zusammen ziehen, denn der Nullpunkt ist im Weg.

3. Wie zuvor sei $U = B_2(0) \setminus \{0\}$, und sei $\Gamma := \kappa(1, 0) - \kappa(1/2, 0)$. Dieser Zyklus ist nullhomolog, denn — im Gegensatz zum vorherigen Beispiel – gilt an der kritischen Stelle $z = 0$: $n(\Gamma, 0) = \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$



Bildlich: diesen Zyklus kann man auf einen Punkt in U zusammen ziehen, denn: man kann einen „Null-Zyklus“, etwa $\Gamma_0 := [(0.5, 0), (1, 0)] - [(1, 0), (0.5, 0)]$ zu Γ addieren und entlang Γ_0 „aufschneiden“.

Satz 4.11 (Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz und allgemeine Cauchysche Integralformel)
Es seien Γ ein nullhomologer Zyklus in der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

1. $\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

2. *Für jeden Punkt $z \in U \setminus Sp\Gamma$ und alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt*

$$n(\Gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.2}$$

Beweis: Ad 2.
Sei $k = 0$ — der allgemeine Fall ergibt sich durch Differenzieren.
Für $z \in U \setminus Sp\Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} n(\Gamma, z) f(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \Big(\int_\Gamma \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + \int_\Gamma \underbrace{\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}}_{=:h(z)}\,\mathrm{d}\zeta \Big) \end{aligned}$$

Was für den Beweis der Aussage 2 für $k = 0$ zu zeigen bleibt, ist, dass das zweite Integral verschwindet.
Dabei lassen wir uns von folgender Idee leiten: wir zeigen, dass sich h auf ganz $\mathbb{C}$ zu einer holomorphen Funktion fortsetzen lässt mit $\lim_{z\to\infty} h(z) = 0$. Aus dem Satz von Liouville folgt dann, dass $h \equiv 0$.
Wir definieren dazu:

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & , \ z \neq \zeta \\ f'(z) & , \ z = \zeta \end{cases}$$

Dann ist $g : \mathbb{C}^2 \supset U \times U \to \mathbb{C}$ stetig, denn für einen festen Punkt $(\zeta_0, z_0) \in U \times U$ gilt:
Ist $\zeta_0 \neq z_0$, so gilt in der Nähe von (ζ_0, z_0) die Formel

$$g(\zeta, z) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}.$$

Ist $\zeta_0 = z_0$, unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

$$\begin{aligned} z = \zeta \quad &\Rightarrow \quad g(z, z) - g(z_0, z_0) = f'(z) - f'(z_0), \\ z \neq \zeta \quad &\Rightarrow \quad g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} - f'(z_0) \\ &\qquad = \frac{1}{\zeta - z} \int_{[z-\zeta]} (f'(w) - f'(z_0))\,\mathrm{d}w. \end{aligned}$$

Da der Potenzreihenentwicklungssatz die Stetigkeit von f' in z_0 garantiert, folgt, dass g auf $U \times U$ stetig ist.
Wir setzen

$$h_0(z) := \int_\Gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta.$$

Wegen der Stetigkeit von g ist $h_0 : U \to \mathbb{C}$ stetig. Wir zeigen: h_0 ist auch holomorph.
Dazu sei γ der positiv orientierte Rand eines Dreieck in U. Um den Satz von Morera anzuwenden, müssen wir zeigen, dass $\int_\gamma h_0(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma h_0(z), \mathrm{d}z &= \int_\gamma \Big(\int_\Gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}\zeta \Big)\,\mathrm{d}z \\ &\overset{(\star)}{=} \int_\Gamma \Big(\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}z \Big)\,\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

Im Schritt $(\star)$ ging ein, dass $g : U \times U \to \mathbb{C}$ stetig ist und somit der Satz von Fubini aus der Integration in mehreren Veränderlichen anwendbar ist.
Für festes ζ ist offensichtlich die Funktion $U \setminus \{\zeta\} \ni z \mapsto g(\zeta, z)$ holomorph. Aus dem Cauchyschen Integralsatz für Wegintegrale folgt

$$\int_\gamma g(\zeta, z)\,\mathrm{d}z = 0 \text{ und somit } \int_\gamma h_0(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Nun bringen wir die Voraussetzungen über Γ ins Spiel.
Sei $U_0 := \{z \in \mathbb{C}; n(\Gamma, z) = 0\}$.
Auf U_0 gilt einfacher:

$$h_0(z) = -f(z) \underbrace{\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta}_{=n(\Gamma,z)=0} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta =: h_1(z).$$

Offenbar ist h_1 in U_0 holomorph. Wir können setzen:

$$h(z) := \begin{cases} h_0(z) & , z \in U \\ h_1(z) & , z \in U_0 \setminus U \end{cases}$$

Damit ist $h : U \cup U_0 \to \mathbb{C}$ holomorph. Da Γ nullhomolog ist, ist allerdings $U \cup U_0 = \mathbb{C}$. Also ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph („eine *ganze Funktion*“).

Sei nun $z \in U_0$ (dazu gehört insbesondere die unbeschränkte Komponente). Es gilt

$$|h(z)| = |h_1(z)| \leq L(\Gamma) \cdot \max_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Gamma)} \overset{z \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Folglich ist h beschränkt und damit nach dem Satz von LIOUVILLE konstant. Wegen $|h(z)| \to 0$ folgt $h \equiv 0$.

Ad 1.
Sei $a \in (U \cap U_0) \setminus Sp\Gamma$. (Ein solcher Punkt a existiert, da $\operatorname{dist}(Sp\Gamma, \partial U) > 0$ ist.) Die Funktion $F(z) := f(z)(z-a)$ ist auf U holomorph. Mit 2 folgt

$$\underbrace{n(\Gamma, a)}_{=0} F(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z.$$

□

Satz 4.12 *Seien* Γ, Γ' *homologe Zyklen in* U *und* $f : U \to \mathbb{C}$ *holomorph. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \int_{\Gamma'} f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Beweis: $\Gamma - \Gamma'$ ist nullhomolog. □

Bemerkung: Aus Satz 4.12 folgt insbesondere, dass das Residuum von f um $z \in U$ kurvenunabhängig ist. Definiert man

$$\operatorname{res}_z f := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(r,z)} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta$$

für hinreichend kleines $r > 0$, so ist der Wert identisch für jedes Integral über einen zu $\kappa(r, z)$ homologen Zyklus.

Beispiel 4.13

1. Für $f(z) = 1/(z-a)$ ist $\operatorname{res}_a f = 1$, für $f(z) = (z-a)^{-n}$ $(n \geq 2)$ ist $\operatorname{res}_a f = 0$.

2. Sei $f(z) = 1/(z(z-\mathrm{i})^2)$. Diese Funktion ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}\}$ holomorph.

Betrachten wir zunächst die LAURENT–Entwicklung dieser Funktion in dem Kreisring $\{z; 0 < |z| < 1\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^2}\\ &= -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k\\ &= -\frac{1}{z}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k.\end{aligned}$$

Da in der Reihe keine negative Potenz von z auftaucht, gilt folglich $\mathrm{res}_0 f = -1$.

Betrachten wir die LAURENTentwicklung um 0 in dem unbeschränkten Gebiet $\{z; 1 < |z| < \infty\}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} &= \frac{1}{z^3}\frac{1}{(1-i/z)^2} = \frac{1}{z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{z}\right)^k\\ &= \sum_{k=-\infty}^{-3}\mathrm{i}^{-k-1}(k+2)z^k.\end{aligned}$$

In dieser Reihenentwicklung tritt kein Summand zum Index -1 auf.

Die LAURENTentwicklung um i im Kreisring $\{0 < |z-\mathrm{i}| < 1\}$ ergibt das folgende Residuum:

$$\frac{1}{z(z-\mathrm{i})^2} = \frac{-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z},$$

also $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = 1$.

Zusammengefasst:

$$\mathrm{res}_0 f = -1, \quad \mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = 1.$$

Die Bedeutung des Residuums wird erst durch den folgenden Satz deutlich:

Satz 4.14 (Residuensatz) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf isolierte Singularitäten. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus Γ in U*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in U} n(\Gamma, z)\mathrm{res}_z f. \tag{4.3}$$

Die Summe auf der rechten Seite von (4.3) ist endlich, denn $n(\Gamma, z) \neq 0$ gilt nur auf den beschränkten Wegkomponenten von Γ, deren Vereinigung A in U liegt und wo $\overline{A}$ kompakt ist. Allerdings können in $\overline{A}$ nur endlich viele Singularitäten von f liegen. In allen anderen Punkten verschwindet $\mathrm{res}_z f$.

Beweis: $z_1, \ldots, z_m$ seien die Singularitäten von f mit $n(\Gamma, z_\mu) \neq 0$, M sei die Menge der sonstigen Singularitäten.
$h_\mu(z)$ sei der Hauptteil der LAURENTentwicklung von f um z_μ. Dann ist $h_\mu : \mathbb{C} \setminus \{z_\mu\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Ebenfalls ist die Funktion $f - \sum_{\mu=1}^m h_\mu$ auf $U \setminus M$ holomorph.
Der Zyklus Γ ist in U und somit auch in $U \setminus M$ nullhomolog.
Aus dem globalen CAUCHYschen Integralsatz folgt damit

$$\int_\Gamma \Big(f(z) - \sum_{\mu=1}^m h_\mu(z) \Big) \, \mathrm{d}z = 0$$

oder äquivalent

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \sum_{\mu=1}^m \int_\Gamma h_\mu(z) \, \mathrm{d}z.$$

Schreiben wir $h_\mu(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_{\nu\mu}(z - z_\mu)^\nu$, gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z &= \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=-\infty}^{-1} a_{\nu\mu} \int_\Gamma (z - z_\mu)^\nu \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_\mu a_{-1,\nu} \int_\Gamma (z - z_\mu)^{-1} \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_\mu \big(\mathrm{res}_{z_\mu} f \cdot n(\Gamma, z_\mu) \big) \cdot 2\pi \mathrm{i}.
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile dieser Rechnung haben wir stillschweigend davon Gebrauch gemacht, dass die LAURENTreihe auf kompakten Teilen des Konvergenzbereichs gleichmäßig konvergiert, also Integration und Summation vertauscht werden können. Ferner haben wir den globalen CAUCHYschen Integralsatz verwendet:

$$\int_\Gamma (z - z_\mu)^{-\nu} = 2\pi \mathrm{i} \, n(\Gamma, z_\mu) \underbrace{\mathbf{1}^{(\nu-1)}}_{=0, \nu \geq 2}.$$

$\square$

Definition 4.15 *Ein Gebiet, in dem jeder Zyklus nullhomolog ist, heißt* einfach zusammenhängend.

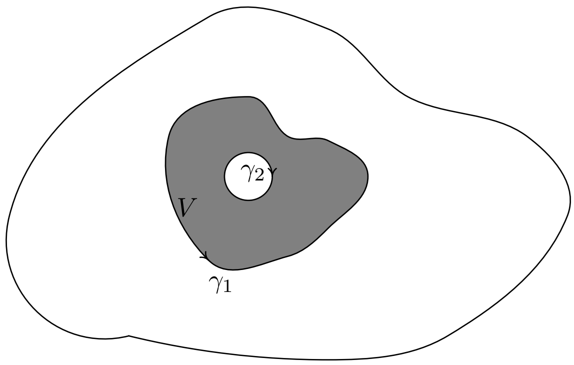
Bildlich gesprochen, hat ein einfach zusammenhängendes Gebiet keine Löcher.

Korollar 4.16 *Seien U ein einfach zusammenhängendes Gebiet und Γ ein Zyklus in U. Dann gilt*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in U} n(\Gamma,z)\mathrm{res}_z f,$$

sofern f bis auf isolierte Singularitäten in U holomorph ist und Γ durch keine Singularität läuft.

Geometrisch kann das auch in etwa wie folgt beschrieben werden:
Sei Γ in U der Randzyklus eines offenen Menge $V \subset U$, d. h. $\overline{V} \subset U$, $\partial V = Sp\Gamma$, $n(\Gamma, z) = 1$ für $z \in V$, $n(\Gamma, z) = 0$ für $z \notin \overline{V}$.



$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

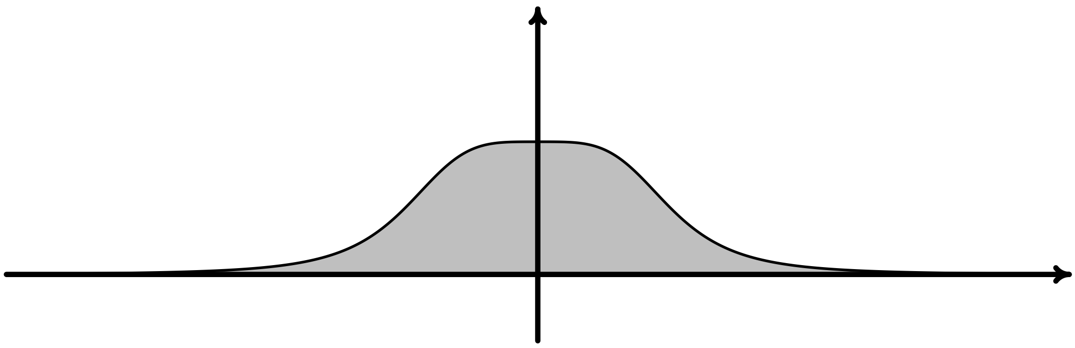
Ist $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph bis auf isolierte Singularitäten, von denen keine auf Γ liegt, so gilt

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{z\in V}\mathrm{res}_z f.$$

Zum Abschluss des Kapitels — und als Vorgriff auf das nächste — geben wir ein Beispiel an, welches den Nutzen des Residuenkalküls verdeutlichen soll.

Beispiel 4.17 Die Berechnung des uneigentlichen Riemann–Integrals

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

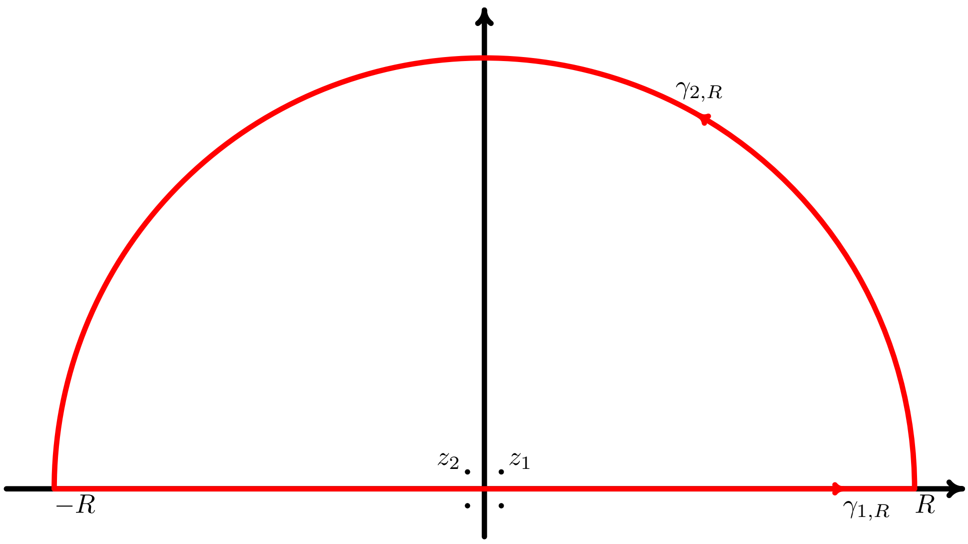


Dieses Integral existiert, wie man sich leicht klar macht.
Zur Berechnung des Integrals macht man einen Umweg über $\mathbb{C}$: Statt $f(x) = (1+x^4)^{-1}$ schreiben wir $f(z) = (1+z^4)^{-1}$. Diese Funktion hat Polstellen erster Ordnung in den Punkten

$$\begin{aligned} z_1 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) \\ z_2 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i}) \\ z_3 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,5\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i}) \\ z_4 &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}) \end{aligned}$$

Keine der Polstellen liegt auf der reellen Achse. Wir definieren daher die folgenden Integrationswege

$$\gamma_{1,R} := [-R, R], \quad \gamma_{2,R} := R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 0 \le t \le \pi.$$



Schätzen wir zunächst das Integral über den Halbkreis ab:

$$\Big|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{1}{1+R^4\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}4t}\mathrm{d}t\Big| \leq \frac{R}{R^4-1}\pi \overset{(R\to\infty)}{\longrightarrow} 0.$$

Für das Integral über $\gamma_{1,R}$ gilt

$$\int_{\gamma_{1,R}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = \int_{-R}^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Mit $\Gamma_R := \gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ ist demnach

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}.$$

Nun gilt aber für $R > 1$:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4} + \mathrm{res}_{z_2}\frac{1}{1+z^4})$$

Rechnen wir die Residuen daher aus:

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}_{z_1}\frac{1}{1+z^4} &= \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{1+z^4} \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\mathrm{i}-1} \\
\mathrm{res}_{z_2}\frac{1}{1+z^4} &= \ldots = \frac{1}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\mathrm{i}+1}
\end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= 2\pi\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}(\frac{1}{\mathrm{i}-1} + \frac{1}{\mathrm{i}+1}) \\
&= \frac{\pi\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}\frac{(\mathrm{i}-1)+(\mathrm{i}+1)}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

Kapitel 5

Anwendungen des Residuenkalküls

Wie sich am Ende des vorigen Kapitels in Beispiel 4.17 bereits angedeutet hat, bietet der Residuenkalkül ein mächtiges Werkzeug, um uneigentliche Integrale mit einem Umweg über $\mathbb{C}$ zu berechnen. In diesem Kapitel wollen wir den Kalkül etwas vertiefen und weitere Anwendungen — beispielsweise für die Berechnung von Reihen — aufzeigen.

5.1 Anwendung auf die Berechnung uneigentlicher Integrale

Anwendung 1:

R sei eine rationale Funktion ohne Pole auf der reellen Achse, die bei ∞ mindestens von der Ordnung 2 verschwindet (d. h. $R(1/z)$ hat in 0 eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2). Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\zeta>0} \mathrm{res}_\zeta R.$$

Beweis: Seien $r > 0$ und $\alpha_r(t) := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$.
Mit dem in Beispiel 4.17 bereits benutzten Prinzip gilt

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\zeta>0} \mathrm{res}_\zeta R$$

Was zu zeigen bleibt, ist dass das Integral über α_r gegen Null konvergiert für $r \to \infty$.
Es gilt

$$\Big|\int_{\alpha_r} R(z)\,\mathrm{d}z\Big| \leq L(\alpha_r)\max_{|z|=r}|R(z)| = r\pi\max_{|z|=r}|R(z)| \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da nach Voraussetzung ein r_0 existiert mit $|R(z)| \leq c/r^2$ für $|z| = r$ und $r \geq r_0$.
$\square$

Bemerkung: Die Aussage lässt sich verallgemeinern auf den Fall, dass R auf einer Umgebung von $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}z \geq 0\}$ holomorph ist bis auf abzählbar viele isolierte Singularitäten, von denen keine auf $\mathbb{R}$ liegen, und dass eine Folge $r_n \to \infty$ existiert mit $|R(z)| \leq cr_n^{-(1+\varepsilon)}$ für $z \in \overline{H}$ mit $|z| = r_n$ (n unabhängig von c und z).

Beispiel 5.1 Zu berechnen ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{x+\mathrm{i}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dazu definieren wir eine geeignete Wurzel von i, nämlich $\sqrt{\mathrm{i}} := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, und berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{x+\mathrm{i}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{\mathrm{i}}\Big(\frac{\sqrt{z+\mathrm{i}}}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}\Big) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\sqrt{2\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \pi(1+\mathrm{i})$$

Anwendung 2

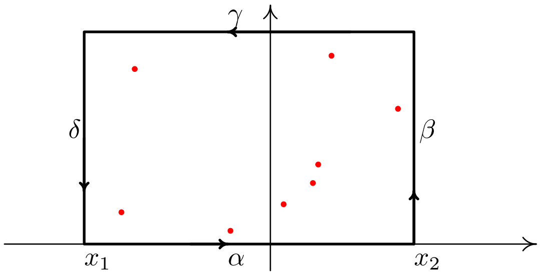
Sei R wie in Anwendung 1, und R habe in ∞ eine doppelte Nullstelle. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\zeta>0}\mathrm{res}_\zeta[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}]$$

Der Beweis ist analog zu oben; zusätzlich geht ein, dass $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \leq 1$ für $\mathrm{Im}z \geq 0$.

Anwendung 2a

Die Nullstelle von R bei ∞ braucht nur einfach zu sein. Denn: sei $x_1 < 0 < x_2$, und sei $y > 0$ groß genug, dass die Pole von R im Rechteck mit den Ecken $x_1, x_2, x_2 + \mathrm{i}y, x_1 + \mathrm{i}y$ liegen.



Aus dem Residuensatz folgt

$$\int\limits_{\alpha\beta\gamma\delta} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\mathrm{Im}\zeta>0}\mathrm{res}_\zeta R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$$

Offensichtlich entspricht das reelle Integral von x_1 bis x_2 dem Integral über α. Was wir zu zeigen haben, ist dass die Integrale über β,γ,δ verschwinden.

$$\Big|\int_\beta R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\Big| \overset{z=x_2+\mathrm{i}s}{=} \Big|\mathrm{i}\int_0^y R(x_2+\mathrm{i}s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_2-s}\,\mathrm{d}s\Big| \le \underbrace{\sup_{|z|\ge x_2}|R(z)|}_{\overset{x_2\to\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{\int_0^y \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s}_{\le 1}.$$

Das Integral über δ wird analog abgeschätzt.
Bleibt noch das Integral über γ:

$$\Big|\int_\gamma R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\,\mathrm{d}z\Big| \le (x_2-x_1)\mathrm{e}^{-y}\sup_{|z|\ge y}|R(z)| \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beispiel 5.2

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(\star)}{=} -\pi\mathrm{Im}\,\mathrm{res}_{\mathrm{i}a}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i}a)(z-\mathrm{i}a)} = -\pi\mathrm{Im}\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a} \\ &= \frac{\pi}{2a}\mathrm{e}^{-a}\end{aligned}$$

In Schritt $(\star)$ ging neben dem Residuensatz ein, dass für $z=x+\mathrm{i}y$ gilt $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}z$.

Bemerkung: Es reicht in Anwendung 2 schon die Bedingung, dass $R:\overline{H}\to\mathbb{C}$ holomorph ist bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, von denen keine auf $\mathbb{R}$ liegt, und $\lim_{z\to\infty}R(z)=0$.

Beispiel 5.3 Wir wollen zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i})\sqrt{x-\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}(1-\mathrm{i}).$$

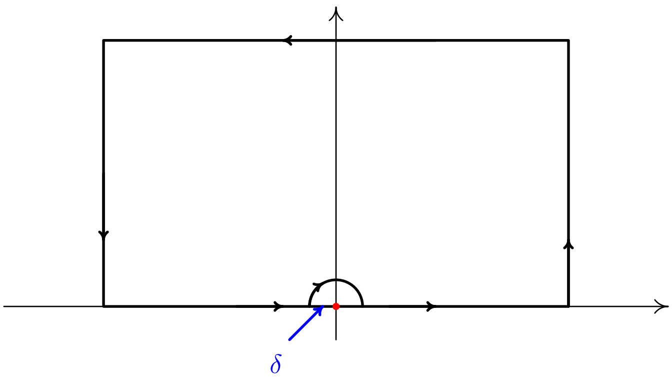
Wir setzen bei der Variablentransformation $\sqrt{-\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{(x+\mathrm{i})\sqrt{x-\mathrm{i}}} = -2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{-\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{(z+\mathrm{i})\sqrt{z-\mathrm{i}}} = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{\sqrt{-2\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{\mathrm{e}}(1-\mathrm{i}).$$

Funktionen, die keine Singularitäten auf der reellen Achse besitzen, lassen sich also mit dem Residuenkalkül elegant integrieren. Etwas anders sieht die Sache aber bei der Funktion $\frac{\sin x}{x}$ aus; auch diese Funktion ist vom Typ wie in Anwendung 2a, denn nach den EULERschen Formeln ist

$$\frac{\sin x}{x} = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{R(x)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

aber die Funktion $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/x$ hat im Nullpunkt einen Pol erster Ordnung.
Als Lösung bietet sich an, über die folgende Kurve zu integrieren:



Definition 5.4 *Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ stetig, und sei $\delta > 0$. Ferner existieren die Integrale*

$$\int_{-\infty}^{a-\delta} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{und} \quad \int_{a-\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Falls der Grenzwert

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \Big(\int_{-\infty}^{a-\delta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a-\delta}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \Big)$$

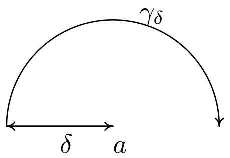
existiert, so heißt er (Cauchyscher) Hauptwert (HW) *des Integrals von f von $-\infty$ bis ∞. Wir schreiben kurz*[1]

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ist f an endlich vielen Stellen $a_1, \dots, a_n$ nicht definiert, definiert man den Hauptwert analog.

Bemerkung: f habe bei a einen einfachen Pol, und für $\delta > 0$ sei $\gamma_\delta(t) := a + \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)}$, $0 \le t \le 1$. Dann gilt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\mathrm{res}_a f$$



Beweis: Sei

$$f(z) = \frac{c-1}{z-a} + g(z), \quad g \text{ in } a \text{ holomorph.}$$

Es folgt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{c-1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} + \underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} g(z)\,\mathrm{d}z}_{\longrightarrow 0\ (\delta \to 0)}.$$

Berechnen wir daher das erste Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-a} &= -\pi \mathrm{i} \int_0^1 \frac{1}{\delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)}} \delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(1-t)} = -\pi \mathrm{i} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\mathrm{res}_a f \end{aligned}$$

□

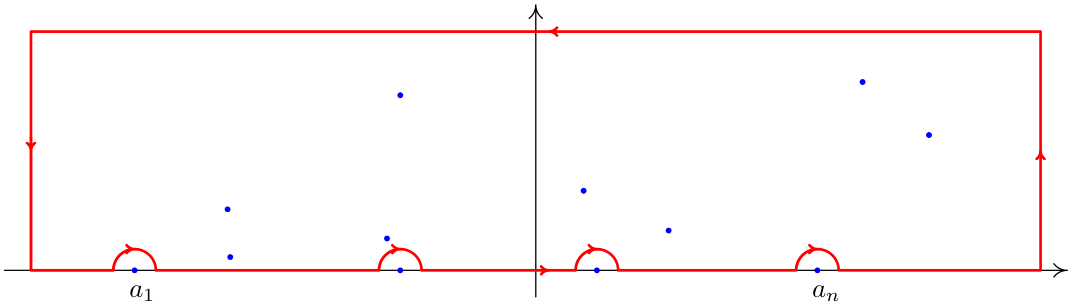
[1] In der englischsprachigen Literatur hat sich der Begriff P.V.$\int_{-\infty}^{\infty} f$ eingebürgert. „P.V.“ steht für „Principal Value“.

Anwendung 2b

Hat die rationale Funktion R bei ∞ eine einfache Nullstelle und auf der reellen Achse keine Pole außer den einfachen Polstellen $a_1 < \ldots < a_n$, dann gilt

$$HW \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\zeta>0} \mathrm{res}_\zeta\big(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big) + \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{a_k}\big(R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\big).$$

Beweis: Wir integrieren über die folgende Kurve:



$\square$

Wir können also auf elegante Art errechnen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{Im}\Big(HW\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\,\mathrm{d}x\Big) \\ &= \mathrm{Im}\big(\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\big) = \mathrm{Im}(\pi\mathrm{i}) = \pi\end{aligned}$$

Anwendung 3

Sei $0 < a < 1$. R sei eine rationale Funktion, die in ∞ mindestens von der Ordnung 2 verschwindet, bei 0 holomorph ist oder einen Pol der Ordnung 1 hat und keine Pole auf der positiven reellen Achse.
Unsere Ziel ist die Berechnung des uneigentlichen Integrals

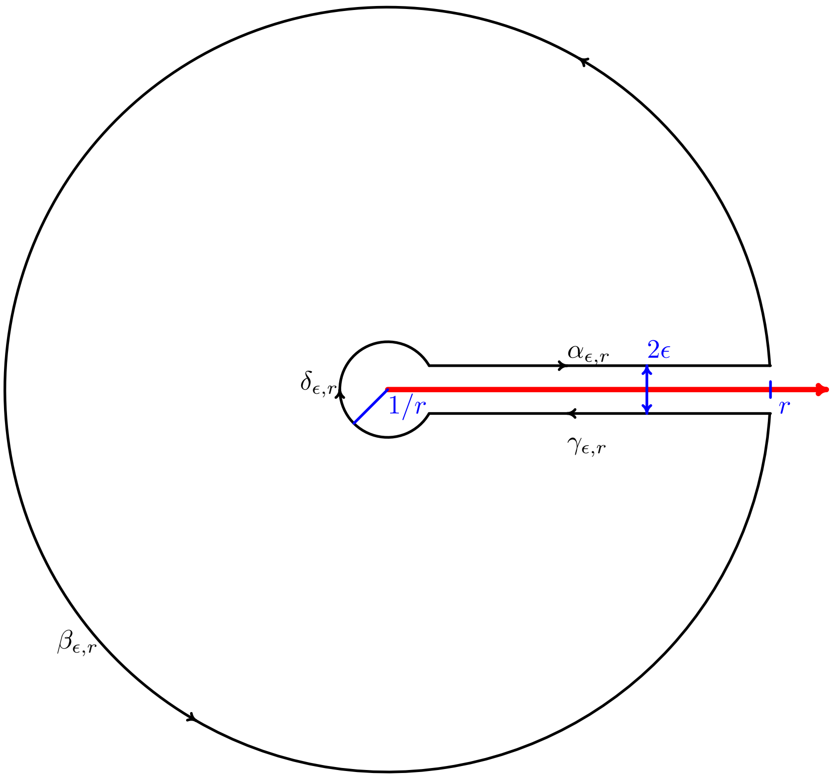
$$\int_0^\infty x^a R(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir setzen $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Zu $z \in G$ existieren eindeutige $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, so dass $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Wir definieren daher:

Definition 5.5 *Der komplexe Logarithmus wird definiert durch* $\ln : G \to \mathbb{C}$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mapsto \ln r + \mathrm{i}\theta$ *mit dem reellen Logarithmus auf der rechten Seite.*

Dies ist die holomorphe Umkehrabbildung der Exponentialfunktion exp : $\{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w \in (0, 2\pi)\}$.

Um zu der Berechnung des Integrals zurückzukommen:
Wir integrieren über den folgenden Weg:



Hierbei sei ε hinreichend klein, r hinreichend groß.
Es gilt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha_{\varepsilon,r}} z^a R(z) \, \mathrm{d}z = \int_{1/r}^{r} x^a R(x) \, \mathrm{d}x$$

sowie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,r}} z^a R(z) \, \mathrm{d}z = \left(\int_{1/r}^{r} x^a R(x) \, \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a} \right),$$

denn

$$\lim_{y \downarrow 0} (x - y)^a = \lim_{y \downarrow 0} \mathrm{e}^{a \ln(x - \mathrm{i}y)} = x^a \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a}$$

Die Integrale über die Kreisabschnitte können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\beta_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z\Big| &\leq 2\pi r c r^{a-2} \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0,\\
\Big|\int_{\delta_{\varepsilon,r}} z^a R(z)\,\mathrm{d}z\Big| &\leq 2\pi \frac{1}{r} c \big(\frac{1}{r}\big)^a r \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0;
\end{aligned}$$

hierbei ist $c = \max_{z\in\Gamma} R(z)$ ($\Gamma = \beta_{\varepsilon,r}$ bzw. $\Gamma = \delta_{\varepsilon,r}$). Ferner haben wir in der ersten Abschätzung davon Gebrauch gemacht, dass R im Unendlichen mit der Ordnung ≥ 2 verschwindet.
Zusammengefasst ist also

$$(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a}) \int_0^\infty x^a R(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty,\varepsilon\to 0} \int_{\alpha\beta\gamma\delta} z^a R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in G} \mathrm{res}_z(z^a R(z)).$$

Beispiel 5.6 Sei $0 < a < 1$. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^a - 1}{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{x^a}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\\
&\stackrel{(\star)}{=} \frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}a} - 1} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.
\end{aligned}$$

In Schritt ($\star$) haben wir ausgenutzt, dass $z = -1$ der einzige Pol der Funktion $z^a/z(z+1)$ in G ist. Damit gilt:

$$\mathrm{res}_{-1} \frac{z^a}{z(z+1)} = \lim_{z\to -1} \frac{z^a}{z} = -(-1)^a = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi a}.$$

Anwendung 4

R sei eine rationale Funktion ohne Pole auf dem Rand des Einheitskreises. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\
&\stackrel{(\star)}{=} -\mathrm{i} \int_{\kappa(1,0)} \underbrace{R\Big(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big), \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(z - \frac{1}{z}\big)\Big) \frac{1}{z}}_{=:Q}\,\mathrm{d}z\\
&= 2\pi \sum_{|\zeta|<1} \mathrm{res}_\zeta Q.
\end{aligned}$$

Im Schritt ($\star$) haben wir dabei die Parametertransformation $z := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ vorgenommen; es ist dann

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big), \quad \sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(z - \frac{1}{z}\big).$$

5.2 Anwendung auf die Berechnung von Reihenwerten

Bislang haben wir nur von einer Richtung des Residuensatzes Gebrauch gemacht, nämlich davon, dass ein Integral unter bestimmten Umständen als endliche Summe ausgedrückt werden kann. In diesem Abschnitt möchten wir die umgekehrte Richtung beschreiten.
Im Folgenden seien $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ziel ist die Berechnung von

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

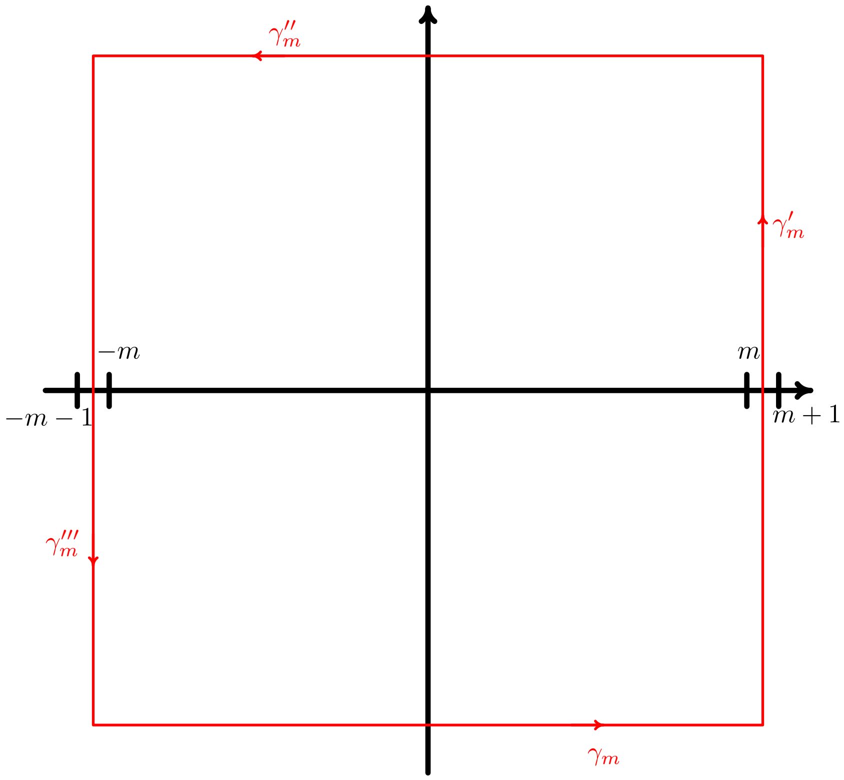
Die Grundidee ist wie folgt: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph bis auf isolierte Singularitäten mit $f(n) = a_n$ für $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktion $t : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und habe in allen $n \in \mathbb{Z}$ einen einfachen Pol mit Residuum 1 („Summierungsfunktion“). Γ sei eine positiv orientierte, einfach geschlossene Integrationskurve mit $Sp(\Gamma) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$, die durch keine Singularität von f läuft.
Nach dem Residuensatz gilt

$$\int_\Gamma f(z)t(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\Big(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n(\Gamma,n)=1}} f(n) + \sum_{\substack{z\in\mathbb{C}\setminus Sp(\Gamma) \\ n(\Gamma,z)=1 \\ f \text{ in } z \text{ singulär}}} \operatorname{res}_z ft\Big) \tag{5.1}$$

Alles wofür man jetzt noch zu sorgen hat, ist dass Integral in (5.1) gegen Null konvergiert, wenn Γ gegen ∞ deformiert wird. In diesem Fall ist nämlich die Reihe durch die Residuen von ft an den Singularitäten von f ausgedrückt.
Wählt man eine Summierungsfunktion mit Residuum $(-1)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, so kann man entsprechend $\sum_n (-1)^n a_n$ berechnen.

Als Integrationsweg ist naheliegend, über den Rand Γ_m eines Quadrats mit den Eckpunkten $\pm(m+1/2) \pm \mathrm{i}(m+1/2)$ zu integrieren; damit ist gewährleistet, dass

1. Γ_m gegen ∞ deformiert wird für $m \to \infty$,
2. Γ_m durch keine Singularität der Summierungsfunktion läuft. — Sollte f in Punkten auf dem Rand eines solchen Quadrats singulär sein, kann man Γ_m entsprechend um $\varepsilon < 1/2$ vergrößern oder verkleinern.



Als Summierungsfunktionen bieten sich an:

$$\begin{aligned} t(z) &:= \frac{\pi}{\tan \pi z}, \quad \mathrm{res}_n t = 1, \\ s(z) &:= \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad \mathrm{res}_n s = (-1)^n. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der EULERschen Formeln schreiben wir s und t um:

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{2\pi \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z}} \\ t(z) &= \frac{\pi}{\tan \pi z} = \mathrm{i}\pi \frac{\cos \pi z}{\mathrm{i} \sin \pi z} = \mathrm{i}\pi \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z}} = \mathrm{i}\pi \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z}} \end{aligned}$$

Diese Identitäten benutzen wir, um s und t auf den Teilwegen von Γ abzuschätzen. Es gilt:

$$\begin{aligned} |s(z)| &\leq 2\pi \mathrm{e}^{-\pi m} \quad \text{für } z \in Sp(\gamma_m) \cup Sp(\gamma_m'') \\ |t(z)| &\leq 2\pi \quad \text{für } z \in Sp(\gamma_m) \cup Sp(\gamma_m'') \\ |s(z)| &\leq \frac{\pi}{\cosh \pi y} \quad \text{für } z \in Sp(\gamma_m') \cup Sp(\gamma_m''') \\ |t(z)| &\leq \pi \tanh \pi y \quad \text{für } z \in Sp(\gamma_m') \cup Sp(\gamma_m''') \end{aligned}$$

Wir zeigen hier nur die erste Gleichung; die anderen drei sind dem Leser zur Übung überlassen.

$$\frac{2\pi \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z}} = \frac{2\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi z}}{1 - \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} z}}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{z=x+\mathrm{i}(m+1/2)}{\Longrightarrow} & |s(z)| = \left| 2\pi \frac{\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}(x+\mathrm{i}(m+1/2))}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x+\mathrm{i}(m+1/2))}} \right| \\
&= & 2\pi \left| \frac{\mathrm{e}^{-m\pi}\mathrm{e}^{-\pi/2}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\pi(m+1/2)}} \right| = 2\pi \mathrm{e}^{-m\pi} \left| \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\pi m}\mathrm{e}^{-\pi/2}} \right| \\
&\leq & 2\pi \mathrm{e}^{-m\pi},
\end{aligned}$$

denn der Nenner im letzten Bruch ist betraglich ≥ 1.

Bemerkung: Es gibt eine von m unabhängige Zahl $M > 0$ mit $|s| \leq M$, $|t| \leq M$ auf $Gamma_m = \gamma_m \cdot \gamma'_m \cdot \gamma''_m \cdot \gamma'''_m$.

Anwendung 5:

Es sei R eine rationale Funktion mit einer Nullstelle der Ordnung ≥ 2 in ∞ und ohne Pole in $\mathbb{Z}$. Dann gilt:

(5.2)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) = -\sum_{z \text{ Pol von } R} \mathrm{res}_z(R \cdot t), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n R(n) = -\sum_{z \text{ Pol von } R} \mathrm{res}_z(R \cdot s)$$

Beweis: Sei m so groß, dass alle Pole a von R $n(\Gamma_m, a) = 1$ erfüllen. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\Gamma_m} R(z)t(z)\,\mathrm{d}z}_{\longrightarrow 0 (m \to \infty)} = \sum_{n=-m}^{m} R(n) + \sum_{z \text{ Pol von } R} \mathrm{res}_z(R \cdot t)$$

Die zweite Gleichung in (5.2) zeigt man analog. □

Beispiel 5.7

1. Sei $\omega > 0$. Wir suchen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\omega^2}$.

   Die Funktion

   $$R(z) = \frac{1}{z^2 + \omega^2}$$

hat Pole in $\pm\mathrm{i}\omega$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{\mathrm{i}\omega}(R\cdot t) &= t(\mathrm{i}\omega)\mathrm{res}_{\mathrm{i}\omega}R = t(\mathrm{i}\omega)\frac{1}{2\mathrm{i}\omega} = \frac{\pi}{2\mathrm{i}\omega}\frac{1}{\tan\pi\mathrm{i}\omega} \\ &= -\frac{\pi}{2\omega}\coth\pi\omega. \end{aligned}$$

⌈**Nebenrechnung:**

$$\frac{1}{\tan\mathrm{i}x} = \frac{\cos\mathrm{i}x}{\sin\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2x}} = -\mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}} = -\mathrm{i}\coth x$$

⌋

Wegen $R(n) = R(-n)$ gilt zusammengefasst:

$$\frac{1}{\omega^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\omega^2} = \frac{\pi}{\omega}\coth\pi\omega.$$

2. Sei $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Wir suchen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-\omega)^2}.$$

Die Funktion $R(z) = (z-\omega)^{-2}$ erfüllt die Voraussetzungen von Anwendung 5: R hat einen Pol der Ordnung 2 in $z = \omega \notin \mathbb{Z}$ und fällt mit der Ordnung 2 gegen ∞ ab.

Um $\mathrm{res}_\omega(R\cdot t)$ zu berechnen, entwickeln wir t in eine Potenzreihe um ω. Dazu sei $h := z-\omega$ (und also $R(h) = h^{-2}$):

$$\begin{aligned} t(\omega+h) &= t(\omega) + t'(\omega)h + \dots \\ &= \pi\cot\pi\omega - \frac{\pi^2}{(\sin\pi\omega)^2}h + \dots \end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathrm{res}_\omega(R\cdot t) = -\frac{\pi^2}{(\sin\pi\omega)^2} \Longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-\omega)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin\pi\omega}\right)^2.$$

3. Gesucht ist

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$R(z) = z^{-2k}$ erfüllt nicht die Voraussetzungen von Anwendung 5 wegen des Pols in $z = 0$.

Andererseits gilt

$$\int_{\Gamma_m} t(z)z^{-2k}\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \ (m \to \infty).$$

Für $z \in Sp(\Gamma_m)$ gibt es eine von m unabhängige Zahl M, so dass $|t(z)| \leq M$; ferner sind $L(\Gamma_m) \sim m$ und $|z^{-2k}| \leq c \cdot m^{-2k}$.

Es ist für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: $\mathrm{res}_n(Rt) = n^{-2k}$.

Für den Spezialfall $n = 0$ müssen wir uns etwas Anderes einfallen lassen. Die Funktion $R \cdot t = z^{-2k}\pi \cot \pi z$ hat in 0 eine Polstelle der Ordnung $2k+1$. Nach (3.14) gilt also

$$\mathrm{res}_0\big(z^{-2k}\pi \cot \pi z\big) = \frac{1}{(2k)!}\big(\pi z \cot \pi z\big)^{(2k)}(0) \tag{5.3}$$

Es läuft also darauf hinaus, $\pi z \cot(\pi z)$ in eine Potenzreihe um 0 zu entwickeln und die Koeffizienten zu vergleichen.

Besagte Potenzreihenentwicklung ist:

$$z \cdot t(z) = \pi z \cot(\pi z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{B_{2j}}{(2j)!}(2\pi z)^{2j}; \tag{5.4}$$

hierbei sind die Werte B_{2j} die sogenannten Bernoulli–Zahlen.

Wie wir diese Zahlen für die Berechnung der Reihe $\sum_n n^{-2k}$ verwenden können, wird sich nach dem folgenden kleinen Exkurs zeigen.

Bernoulli–Zahlen

Definiert werden die Bernoulli–Zahlen durch die folgende Gleichung:

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j \tag{5.5}$$

für z hinreichend nahe bei Null.
Wie man sich leicht klar macht, hat $z/(\mathrm{e}^z - 1)$ im Nullpunkt eine hebbare Singularität, kann also — bei geeigneter Fortsetzung — in eine Potenzreihe um 0 entwickelt werden. Demnach sind die Koeffizienten wohldefiniert.

Die Funktion

$$f(z) := \frac{z}{2} + \left(\frac{2}{e^z - 1} + 1\right) = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

ist gerade, d. h. $f(-z) = f(z)$ (das Nachrechnen sei dem Leser zur Übung überlassen). Wegen der Definition (5.5) der Bernoulli–Zahlen ist

$$f(z) = \frac{z}{2} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j,$$

woraus wir sofort folgern können, dass

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2j+1} = 0,\ j = 1, 2, \ldots,$$

mit anderen Worten

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} z^{2j}. \tag{5.6}$$

Wegen

$$\cot z = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

folgt — man ersetze in (5.6) z durch $2iz$ —, dass

$$z \cot z = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{B_{2j}}{(2j)!} (2z)^{2j}.$$

Hieraus folgt unmittelbar Gleichung (5.4), und der angesprochene Koeffizientenvergleich ergibt

$$\operatorname{res}_0(R \cdot t) = (-1)^k \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2\pi)^{2k}. \tag{5.7}$$

Es bleiben also nur noch die konkreten Werte B_{2k} nachzurechnen. Dazu verfahren wir wie folgt:
Es ist nach Definition für z nahe bei 0:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{j!} z^j,$$

also

$$\begin{aligned}
z &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j z^j}{j!}\right) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j z^j}{j!}\right) - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j z^j}{j!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{B_i}{i!(j-i)!}\right) z^j - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j z^j}{j!},
\end{aligned}$$

letzteres mit dem CAUCHY–Produkt für Reihen.
Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
x &: B_0 + B_1 + B_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad B_0 = 1 \\
x^j &: \sum_{i=0}^{j} \frac{B_i}{(j-i)!i!} = \frac{B_j}{j!} \iff \sum_{i=0}^{j-1} \frac{B_i}{(j-i)!i!} = 0, j \geq 2
\end{aligned}$$

Aus letzterer Rekursionsformel erhalten wir die Gleichung

$$B_j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B_i, \ j = 2, 3, \ldots$$

Für die Berechnung von $\sum_n n^{-2k}$ folgt hieraus insbesondere:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} &= \frac{\pi^6}{945}.
\end{aligned}$$

Anwendung 6:

R sei eine rationale Funktion wie in Anwendung 5. Wir wollen berechenen:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\xi}, 0 \leq \xi \leq 2\pi,$$

mit anderen Worten: wir möchten mit funktionentheoretischen Mitteln herausfinden, welche Funktion die FOURIERtransformierte R hat.[2]

[2]Die reellen Analytiker stellen dazu als Erstes fest, dass R (quadrat–)summierbar ist und geben ihr O.K.. . .

Die Möglichkeit, analog zu Anwendung 5

$$\int_{\Gamma_m} R(z)t(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}\,\mathrm{d}z$$

zu berechnen, erweist sich als ungünstig, denn

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi+\mathrm{i}y\xi}| \stackrel{z\in\gamma_m}{=} \mathrm{e}^{(m+1/2)\xi} \longrightarrow \infty(\xi > 0)$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{y\to-\infty} t(x+\mathrm{i}y) &= \mathrm{i}\pi,\ \text{da} \\ t(x+\mathrm{i}y) &= \pi\cot(\pi(x+\mathrm{i}y)) = \mathrm{i}\pi\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}} \stackrel{y\to-\infty}{\longrightarrow} \mathrm{i}\pi\end{aligned}$$

Wir benutzen daher statt t die Summierungsfunktion

$$u(z) := t(z) - \mathrm{i}\pi = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}.$$

u hat einfache Pole in $n \in \mathbb{Z}$ und ist klein, wo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}$ groß ist.
Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}|u(z)| &\le 2\pi\mathrm{e}^{-2\pi m} & &, z = x - \mathrm{i}(m+\frac{1}{2}) \in Sp(\gamma_m) \\ |u(z)| &\le \frac{2\pi}{1+\mathrm{e}^{-2\pi y}} & &, z = \pm(m+\frac{1}{2}) + \mathrm{i}y \in Sp(\gamma_m') \cup Sp(\gamma_m''') \\ |u(z)| &\le 2\pi & &, z = x + \mathrm{i}(m+\frac{1}{2}) \in Sp(\gamma_m'')\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit

$$\int_{\Gamma_m} R(z)u(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}\,\mathrm{d}z \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zusammengefasst gilt also:

Satz 5.8 *R erfülle die Voraussetzungen in Anwendung 5, und sei $0 \le \xi \le 2\pi$. Dann gilt*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\xi} = -\sum_{z \text{ Pol von } R} \mathrm{res}_z\Big(R\frac{2\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}}{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}z}-1}\Big)$$

Beispiel 5.9 Sei $\mathbb{R} \ni \omega \neq 0$. Wir möchten berechnen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2+\omega^2} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\xi}}{n^2+\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big)$$

Die Nullstellen von $z^2+\omega^2$ sind $\pm \mathrm{i}\omega$. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{\mathrm{i}\omega}(R \cdot u \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \frac{2\pi \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{-2\pi\omega}-1} \mathrm{e}^{-\xi\omega} \\ &= -\frac{\pi}{\omega} \frac{\mathrm{e}^{-\xi\omega}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi\omega}} \\ \mathrm{res}_{\mathrm{i}\omega}(R \cdot u \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}z\xi}) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\omega} \frac{2\pi \mathrm{i}\mathrm{e}^{\xi\omega}}{\mathrm{e}^{2\pi\omega}-1} \end{aligned}$$

Mit Satz 5.8 erhalten wir also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2+\omega^2} = \frac{\pi}{2\omega} \frac{\cosh((\pi-\xi)\omega)}{\sinh(\pi\omega)} - \frac{1}{2\omega^2}.$$

5.3 Funktionentheoretische Konsequenzen des Residuensatzes

Zur Erinnerung: Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ bis auf Polstellen holomorph, so nennt man f meromorph in U.
f sei in einer Umgebung um $a \in \mathbb{C}$ holomorph und nehme in a den Wert w mit einer Vielfachheit $k = 1, 2, \dots$ an, d. h. $f - w$ hat in z eine Nullstelle der Ordnung k. Dann ist $f'(z)/(f(z) - w)$ in einer Umgebung von a meromorph. Wir können dann schreiben:

$$f(z) = w + (z-a)^k g(z) \text{ mit } G(a) \neq 0, \ g \text{ in } a \text{ holomorph.}$$

Dementsprechend ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)-w} = \frac{k(z-a)^{k-1}g(z) + (z-a)^k g'(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{k}{z-a} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{in } a \text{ holomorph}},$$

also

$$\mathrm{res}_a\Big(\frac{f'}{f-w}\Big) = k. \tag{5.8}$$

Hat f in b einen Pol der Ordnung k, kann man analog herleiten:

$$f(z) - w = (z-b)^{-k} g(z), \ g \text{ in } b \text{ holomorph,}$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)-w} = \frac{-k(z-b)^{-k-1}g(z)+(z-b)^{-k}g'(z)}{(z-b)^{-k}g(z)} = -\frac{k}{z-b} + \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\text{in } b \text{ holomorph}},$$

woraus folgt

$$\text{res}_b\Big(\frac{f'}{f-w}\Big) = -k. \tag{5.9}$$

Wir haben somit hergeleitet:

Satz 5.10 (Prinzip vom Argument) *f sei auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ meromorph und nicht konstant. Ferner sei $w \in \mathbb{C}$ fest. Die w–Stellen von f seien $a_1, a_2, \ldots$, die Polstellen von f seien $b_1, b_2, \ldots$, jeweils mit den Ordnungen $k(a_\mu)$ bzw. $k(b_\nu)$. Dann gilt für jeden nullhomologen Zyklus Γ in U, der durch keine dieser Stellen läuft:*

$$\frac{1}{2\pi\text{i}}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\text{d}z = \sum_\mu n(\Gamma, a_\mu)k(a_\mu) - \sum_\nu n(\Gamma, b_\nu)k(b_\nu) \tag{5.10}$$

Bemerkung: Die Menge $\overline{\{z; n(\Gamma, z) \neq 0\}}$ ist kompakt; dann haben die Summen in (5.10) jeweils nur endlich viele Summanden.

Korollar 5.11 *Γ sei Randzyklus einer offenen Teilmenge $V \subset U$ mit $\overline{V} \subset U$. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi\text{i}}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}\,\text{d}z = N(w) - N(\infty);$$

hierbei sind $N(w)$ und $N(\infty)$ die Anzahl der w–Stellen bzw. der ∞–Stellen (=Pole) von f in V.

Bemerkung:

1. γ sei ein geschlossener Weg. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi\text{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-w}, \text{d}z = \frac{1}{2\pi\text{i}}\int_{f\circ\gamma} \frac{\text{d}\zeta}{\zeta - w} = n(f\circ\gamma, w)$$

   Bis auf den Faktor 2π ist $n(f\circ\gamma, w)$ die Gesamtänderung des Arguments von $f\circ\gamma(t) - w$, wenn t das Definitionsintervall von γ durchläuft.

2. Lokal folgt Satz 5.10 bereits aus Satz 3.21, und zwar folgendermaßen:

   f habe in a eine w–Stelle der Ordnung k, d. h. $f(z) = (z - a)^k + w$. Wir setzen als Integrationsweg $\gamma := \kappa(\varepsilon, a)$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, so dass in $D_\varepsilon(a)$ keine Polstellen von f enthalten sind. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(\varepsilon,a)} \frac{k(z-a)^{k-1}}{(z-a)^k} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\kappa(\varepsilon,a)} \frac{k}{z-a} \, \mathrm{d}z = k.$$

Satz 5.12 (Rouché) *Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und Γ Randzyklus einer offenen Teilmenge $V \subset U$ mit $\overline{V} \subset U$. Die Funktion*

$$h : [0,1] \times U \to \mathbb{C}, \ (\tau, z) \mapsto h_\tau(z)$$

sei stetig, und für jedes τ sei $h_\tau : u \to \mathbb{C}$ holomorph und habe keine Nullstellen auf Γ.
Dann haben h_0 und h_1 gleich viele Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) in V.

Beweis: Das Nullstellen zählende Integral

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{h'_\tau(z)}{h_\tau(z)} \, \mathrm{d}z$$

hängt stetig von τ ab und ist deshalb auf $[0,1]$ konstant □

Korollar 5.13 *Seien U, V, Γ wie im Satz. $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph ohne Nullstellen auf Γ, und $g : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in Sp(\Gamma)$. Dann haben f und $f + g$ in V gleich viele Nullstellen.*

Beweis: Setze $h_\tau := f + \tau g$. Dann ist $h_0 = f$, $h_1 = f + g$.
Ist $h_\tau(z) = 0$ für ein $\tau \in [0,1]$, so ist $f(z) + \tau g(z) = 0 \Rightarrow |f(z)| = \tau |g(z)| \leq |g(z)|$. Nach Voraussetzung ist dann $z \notin Sp(\Gamma)$, und die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt. □

Beispiel 5.14 Wir wollen zeigen: die Nullstellen des Polynoms $z \mapsto z^7 - 5z^3 + 12$ liegen in dem Kreisring $\{z; 1 \leq |z| \leq 2\}$.
Nehmen wir zunächst $\Gamma := \kappa(1, 0)$. Wir setzen $f(z) \equiv 12$, $g(z) = z^7 - 5z^3$. Für $|z| = 1$ gilt

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq 6 < 12 = |f(z)|.$$

Es folgt: das Polynom hat in $D_1(0)$ keine Nullstellen.
Betrachten wir als nächstes den Zyklus $\Gamma := \kappa(2, 0)$. Wir setzen $f(z) := z^7$, $g(z) := 12 - 5z^3$. Für $|z| = 2$ gilt

$$|g(z)| \leq 12 + |5z^3| = 52 < 128 = |f(z)|.$$

Satz 5.15 *$U \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet, $\{f_n\}$ sei eine Folge von holomorphen Funktionen auf U, die auf U kompakt gegen eine Funktion f konvergieren (d. h. auf jeder kompakten Teilmenge von U gleichmäßig gegen f). Jede Funktion f_n habe höchsten m a–Stellen (mit Vielfachheit gezählt). Dann ist f entweder konstant gleich a oder hat auch höchstens m a–Stellen.*

Beweis: Sei o. B. d. A. $a = 0$.
Annahme: f habe $\geq m + 1$ Nullstellen und sei nicht identisch Null.
Seien $z_1, \ldots, z_r$ die verschiedenen Nullstellen von f. Aufgrund des Identitätssatzes liegen diese isoliert.
Somit existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $k_i = \{z; |z - z_i| \leq \varepsilon\} \subset U$ und k_i außer z_i keine Nullstelle von f enthält. Insbesondere enthält ∂k_i keine Nullstelle von f.
Wir wählen nun ein $\delta > 0$ mit $|f(z)| > \delta$ auf der kompakten Menge $\partial k_1 \cup \cdots \cup \partial k_r$ und n groß genug, dass $|f(z) - f_n(z)| < \delta$ auf diesem Kompaktum.
Dann hat $h_\tau := (1 - \tau)f + \tau f_n$ auf $\partial k_1 \cup \cdots \cup \partial k_r$ keine Nullstelle. Aus dem Satz von ROUCHÉ folgt, dass f_n und f auf $k_1 \cup \cdots \cup k_r$ gleich viele Nullstellen haben, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass f_n höchstens m Nullstellen hat. □

Definition 5.16 *$U \subset \mathbb{C}$ sei offen. Eine injektive und holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wird auf U* schlichte *Funktion genannt.*

Korollar 5.17 *Ist $\{f_n\}$ eine Folge schlichter Funktionen auf dem Gebiet G und konvergiert sie kompakt gegen f, so ist f entweder konstant oder schlicht auf G.*

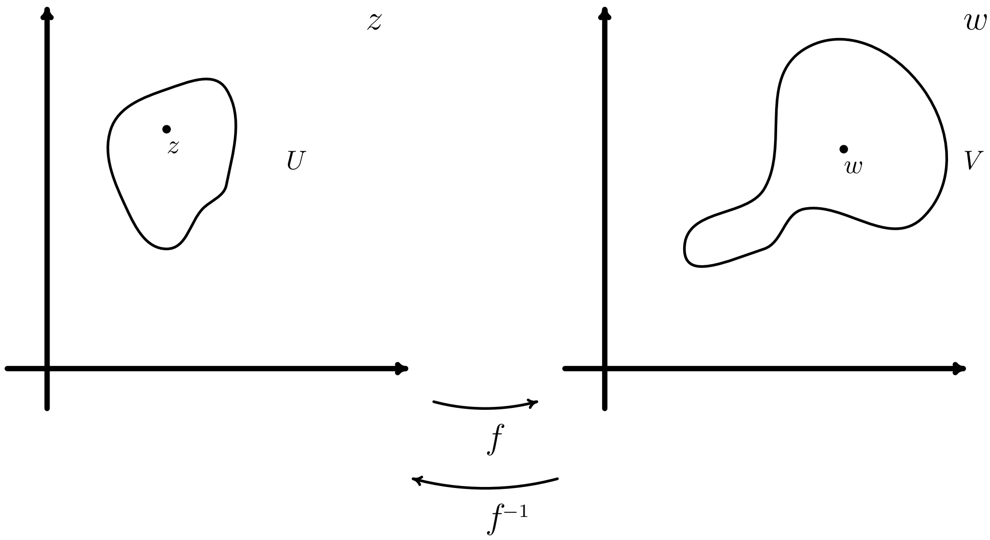
Beweis: Nach dem Satz von WEIERSTRASS ist f in G holomorph. Die Behauptung folgt dann aus Satz 5.15. □

Kapitel 6

Elementare Funktionen und ihre Umkehrfunktionen

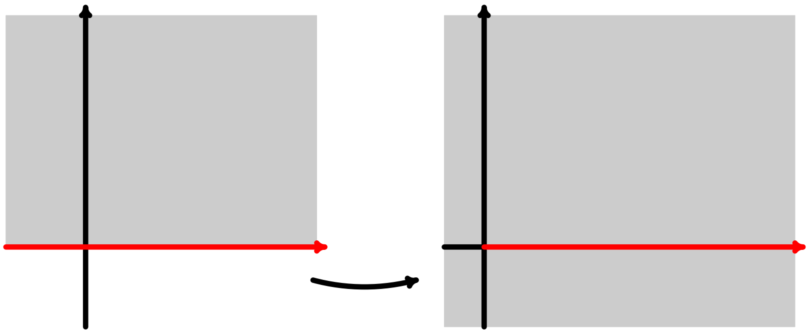
Dass bei einer holomorphen Funktion in einer Umgebung um eine k–fache Nullstelle jeder Punkt (außer der Nullstelle) k mal aufs Bild abgebildet wird, ist uns schon in Satz 3.22 begegnet. In diesem Kapitel möchten wir untersuchen, mit welchen Mitteln man — zumindest lokal — dennoch einer gegebenen nicht konstanten holomorphen Funktion f eine Umkehrfunktion zuordnen kann.
Beginnen wir unsere Betrachtungen mit folgendem

Beispiel 6.1 $w = f(z) := z^n$ für $n = 1, 2, \ldots$
Es gilt $f'(z) = nz^{n-1} \neq 0$ für $z \neq 0$, was Voraussetzung dafür ist, dass f lokal umkehrbar ist.

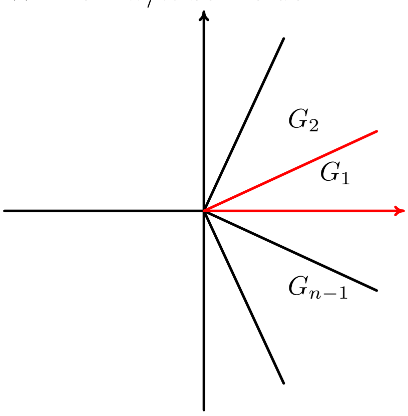


Wie weit der Bereich ausgedehnt werden kann, wo f injektiv ist, hängt offenbar

von n ab. Denn schreiben wir $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, ist $z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$, also muss, damit diese Zuordnung injektiv ist, $\varphi < 2\pi/n$ gelten.
Im Spezialfall $n = 2$ stellt sich der Bereich, auf dem $z \mapsto z^2$ bijektiv ist, folgendermaßen dar:



Allgemein ist ein Fundamentalbereich der Funktion $z \mapsto z^n$ ein offenes Segment in $\mathbb{C}$, das begrenzt wird durch den Nullpunkt und zwei Geraden, die sich mit Winkel $2\pi/n$ schneiden:

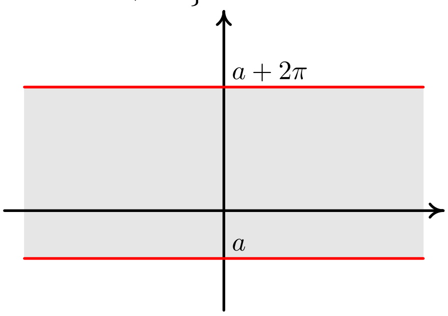


Der Bildbereich ist jeweils die an der positiven rellen Achse (inklusive des Nullpunktes) „geschlitzte“ komplexe Ebene, also $z \mapsto w = z^n : G_i \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ist bijektiv mit jeweiliger Umkehrfunktion $g_i : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to G_i$. Man nennt g_i einen *Zweig* von $\sqrt[n]{w}$.

Die Frage, die sich nun stellt, ist, wie man die einzelnen Zweige zu einer einzigen Funktion „zusammenbasteln“ kann. Sie führt uns zu dem Konstruktionsplan einer RIEMANN*schen Fläche*:
Man denke sich n w–Ebenen, die übereinander liegen und schneide sie alle an der positiven reellen Achse auf. Dann verheftet man einen Schnittrand des ersten Blattes mit dem gegenüber liegenden Schnittrand des zweiten Blattes. Daraufhin verheftet man den noch freien Rand des zweiten Blattes mit dem gegenüber liegenden Rand des dritten u. s. w.

Zum Schluss liegen sich ein Schnittrand des ersten Blattes und ein Schnittrand des n-ten Blattes gegenüber. Will man diese beiden Ränder miteinander verheften, muss man das bisher gebaute Gebilde durchdringen.
Ordnet man jedem Fundamentalbereich G_i das i–te Blatt zu, hat man eine bijektive Abbildung $\sqrt[n]{w}$ von obigem Gebilde auf $\mathbb{C}$ konstruiert. Man nennt das Gebilde RIEMANN*sche Fläche* der Funktion $w = z^n$. Den Nullpunkt, wo alle Blätter verheftet sind, nennt man *Windungspunkt* der RIEMANNschen Fläche.

Beispiel 6.2 $f(z) = \mathrm{e}^z$. Es ist $f'(z) = \mathrm{e}^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$; somit ist f lokal injektiv auf $\mathbb{C}$.
Da für $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$, ist f bijektiv auf einem Streifen $\{z \in \mathbb{C}; a < \mathrm{Im} z < a + 2\pi\}$.



Die RIEMANNsche Fläche über der w–Ebene besteht aus unendlich vielen Blättern, die etwa längs der positiven reellen Achse verheftet sind.

Motiviert von diesem Beispiel können wir eine Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion definieren:

Definition 6.3 *Es sei $G \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{e}^{f(z)} = z$ heißt eine* Logarithmusfunktion *auf G (oder* Zweig des Logarithmus *auf G).*

Bemerkung: Ist f eine Logarithmusfunktion auf G, $\exp : f(G) \to G$ Umkehrfunktion und $f_k(z) := f(z) + 2k\pi\mathrm{i}$ auch Zweig des Logarithmus auf G. Dann hat man mit $\{f_k; k \in \mathbb{Z}\}$ alle zu f gehörigen Zweige des Logarithmus auf G gefunden.

Beweis: Sei g ein weiterer Zweig des Logarithmus. Dann gilt $\mathrm{e}^{f(z)-g(z)} = 1$, also $f(z) - g(z) = 2\pi\mathrm{i}k(z)$. Da f und g stetig sind, ist auch $G \ni z \mapsto k(z) \in \mathbb{Z}$ stetig. Da G zusammenhängend ist, ist diese Abbildung konstant. $\square$

Ist $w \neq 0$ und schreiben wir $w = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_+^\times$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, bietet sich an, den komplexen Logarithmus über die beiden Faktoren zu definieren:

$$\log w := \ln |w| + \arg w;$$

dabei ist der ln auf der rechten Seite der *reelle* natürliche Logarithmus.
Wir sagen, auf $G \subset \mathbb{C}^\times$ existiert ein Zweig der Argumentfunktion arg, wenn es eine stetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\varphi(z)$ für jedes $z \in G$ ein Argument von z ist.

Satz 6.4 *Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Auf G gibt es genau dann eine stetige Argumentfunktion, wenn auf G ein Zweig des Logarithmus existiert.*

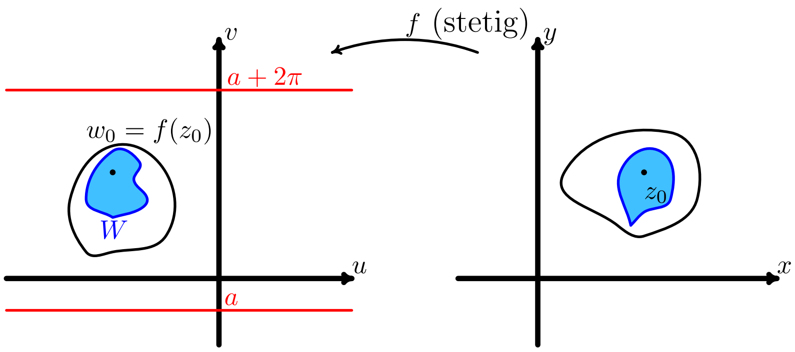
Beweis: $\underline{\alpha}$: $\varphi : G \to \mathbb{R}$ sei Zweig der Argumentfunktion. Es folgt $G \ni z \mapsto \ln|z| + \mathrm{i}\varphi(z)$ ist stetig und Zweig des Logarithmus.

$\underline{\beta}$: $f : G \to \mathbb{C}$ sei Zweig des Logarithmus. Dann gilt $z = \exp(f(z)) = \exp(\mathrm{Re} f(z)) \cdot \exp(\mathrm{i}\mathrm{Im} f(z))$. Es folgt $|z| = \exp(\mathrm{Re} f(z))$, und $z \overset{\varphi}{\mapsto} \mathrm{Im} f(z)$ ist eine Argumentfunktion. □

Wie aus der Analysis bekannt ist, ist die (reelle) Logarithmusfunktion für alle $x > 0$ differenzierbar mit $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Für die komplexe Logarithmusfunktion gilt eine ähnliche Aussage:

Satz 6.5 *Es gebe auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}^\times$ einen Zweig f des Logarithmus. Dann ist f holomorph mit Ableitung $f'(z) = \frac{1}{z}$.*

Beweis: $\underline{\alpha}$: Wir zeigen: $f(G)$ ist offen.



Zu einer offenen Umgebung U von w_0 existiert eine offene Umgebung V von z_0 mit $f(V) \subset U$. Wir wählen U hinreichend klein, dass $\exp : U \to G$ injektiv ist.
Dann existiert eine Umgebung $W \subset U$ von w_0 mit $\exp(W) \subset V$.
Für $w \in W$ gilt: $f(\mathrm{e}^w) \in U$ und $\exp(f(\mathrm{e}^w)) = \mathrm{e}^w$.
Da nach Wahl von U $\exp : U \to \mathbb{C}$ injektiv ist, folgt $f(\mathrm{e}^w) = w \in f(V)$. Also ist die Umgebung W von w Teilmenge von $f(G)$ und damit $f(G)$ offen.

$\underline{\beta}$: f ist Umkehrfunktion der holomorphen Funktion $\exp : f(G) \to G$ und ebenfalls holomorph (siehe Nebenrechnung). Es gilt

$$f'(z) = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w} \exp\right)(w)} = \frac{1}{\exp w} = \frac{1}{z}.$$

⌈ **Nebenrechnung:** Sei $g : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und auf U injektiv (also bijektiv aufs Bild). Insbesondere ist $g'(z) \neq 0$ auf U.
Wir setzen $h^* := g(z+h) - g(z)$ für betragsmäßig hinreichend kleines $h \neq 0$. Wegen der Injektivität von g ist $h^* \neq 0$ auf U. Setzen wir $g(z) =: w$, können wir dies schreiben als $g(z+h) = w + h^*$.
Es gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(z+h)-z}{h} = \frac{g^{-1}(g(z+h)) - g^{-1}(g(z))}{h} \\ &= \frac{g^{-1}(w+h^*) - g^{-1}(w)}{\underbrace{g(z+h) - g(z)}_{=h^*}} \cdot \frac{g(z+h) - g(z)}{h}. \end{aligned}$$

Da g insbesondere stetig ist, strebt $h^* \to 0$ für $h \to 0$.
Auf diese Weise wurde gezeigt, dass g^{-1} differenzierbar ist und die Ableitung von g^{-1} gerade der Kehrwert der Ableitung von g ist. ⌋

□

Als Nächstes möchten wir die Existenz von Zweigen des Logarithmus charakterisieren. Es gilt der folgende

Satz 6.6 *Sei $G \subset \mathbb{C}^\times$ ein Gebiet. Dann sind äquivalent:*

1. *Auf G existiert ein Zweig des Logarithmus.*
2. *$1/z$ hat auf G eine Stammfunktion.*
3. *Für jeden Zyklus Γ in G ist $n(\Gamma, 0) = 0$*

Beweis: „1 ⇒ 2“: Dies ist gerade die Aussage von Satz 6.5.

„2 ⇒ 1“: Sei g eine Stammfunktion von $1/z$. Dann ist

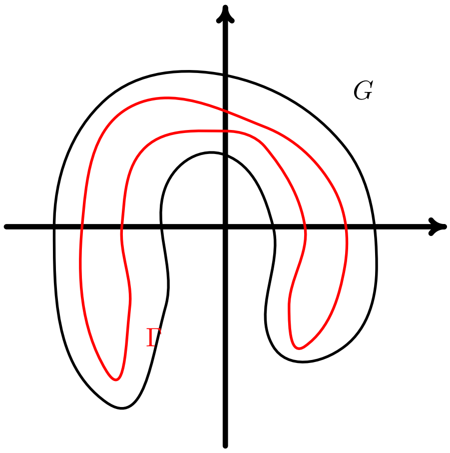
$$(z\mathrm{e}^{-g(z)})' = (1 - zg'(z))\mathrm{e}^{-g(z)} = 0 \Rightarrow z\mathrm{e}^{-g(z)} \equiv \mathrm{e}^C \neq 0.$$

Folglich ist $f(z) = g(z) + C$ ein Zweig des Logarithmus.

„2 ⇔ 3“: $n(\Gamma, 0) = 0$ bedeutet $\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$, d. h. $1/z$ hat auf G eine Stammfunktion.

□

Bei einem Gebiet wie dem Folgenden ist sind die Aussagen des Satzes erfüllt:



Erfülle $G \subset \mathbb{C}^\times$ eine der Bedingungen von Satz 6.6. $f : G \to \mathbb{C}$ sei ein Zweig des Logarithmus, und $\gamma_z : [0,1] \to \mathbb{C}$ sei ein Integrationsweg in G mit $\gamma_z(0) = a$, $\gamma_z(1) = z$. Dann gilt

$$f(z) = \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + f(a)$$

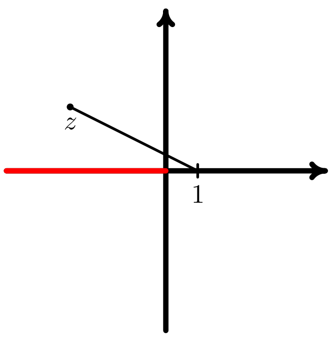
Bemerkung:

1. Die Angabe von $f(a)$ legt f auf G fest.
2. Auf dem Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert kein Zweig des Logarithmus.
3. Ist $G \subset \mathbb{C}^\times$ einfach zusammenhängend, dann existiert auf G ein Zweig des Logarithmus.

Von besonderem Interesse ist dabei ein bestimmter Zweig. Dazu setzen wir $G : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und

$$\ln z := \int_{[1,z]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}.$$

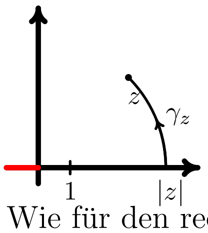
Unschwer zu erkennen ist, dass ln ein Zweig des Logarithmus ist. Ferner ist $\ln x$ für $\mathbb{R} \ni x > 0$ der reelle natürliche Logarithmus von x.



ln wird oft *Hauptwert* bzw. *Hauptzweig* des Logarithmus genannt.
Es gilt

$$\ln z = \int_{[1,|z|]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} = \underbrace{\ln|z|}_{\text{reell}} + \mathrm{i}\arg z \text{ mit } -\pi < \arg z < \pi,$$

wobei $\gamma_z = \exp(t \arg z)$, $0 \le t \le 1$.



Wie für den reellen Logarithmus gilt die Potenzreihenentwicklung

$$\ln(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1.$$

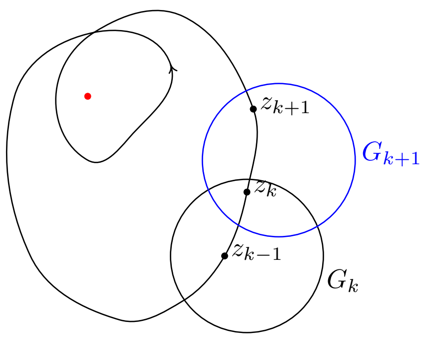
Aber im Gegensatz zum reellen Logarithmus ist an einer Stelle Vorsicht geboten:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \iff \arg z_1 + \arg z_2 \in (-\pi, \pi).$$

So ist

$$\begin{aligned} \ln(\mathrm{e}^{\frac{5}{4}\pi\mathrm{i}}) &= \mathrm{i}\varphi \text{ mit } \varphi \in (-\pi,\pi), \\ &= -\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Die Logarithmusfunktion kann man auch für funktionentheoretische Fragestellungen verwenden, etwa bei der Interpretation der Umlaufzahl. Dazu sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}^{\times}$ ein geschlossener Integrationsweg.
Wir zerlegen $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so, dass jeder Teilweg $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_k-1,t_k]}$ in einem Gebiet G_k verläuft, auf dem ein Zweig des Logarithmus existiert (beispielsweise eine Kreisscheibe von passendem Radius).



Sei f_k Zweig auf G_k mit $f_k(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg_k(z)$. f_1 sei ein beliebiger Zweig, aber für $k = 1, \ldots, n-1$ wird f_{k+1} festgelegt durch $f_{k+1}(z_k) = f_k(z_k)$.
Es folgt: $\varphi : t \mapsto \varphi_k(t) := \arg_k(\gamma(t))$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$ ist auf $[a, b]$ stetig und ordnet jedem t ein Argument von $\gamma(t)$ zu.
Wir können folgern:

$$\int_{\gamma_k} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln|z_k| - \ln|z_{k-1}| + \mathrm{i}(\varphi_k(z_k) - \varphi_k(z_{k-1}))$$

$$\overset{z_n=z_0}{\Longrightarrow} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \mathrm{i}(\varphi(b) - \varphi(a))$$

Also gibt $(2\pi\mathrm{i})^{-1} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$ an, wie oft $\gamma(t)$ insgesamt den Nullpunkt umläuft, wenn t das Intervall $[a, b]$ durchläuft.

Werfen wir zum Schluss des Kapitels noch einen Blick auf allgemeine Potenzen.
Auf $\mathbb{R}$ gilt bekanntlich für $a > 0$ und beliebiges b: $a^b = \mathrm{e}^{b \cdot \ln a}$.
Auf $\mathbb{C}$ wird es etwas schwieriger: Ist $a \notin \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{C}$ beliebig, kann man zwar prinzipiell auch schreiben $\exp(b \cdot \ln a)$, aber dies ist nur ein Zweig der b–ten Potenz von a.
Einfach ist die Berechnung von a^b nur für ganzzahlige b.
Betrachten wir den Fall $b = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\exp(2\pi\mathrm{i}\frac{k}{n}) = \exp(2\pi\mathrm{i}\frac{k'}{n}) \iff k - k' \text{ Vielfaches von } n.$$

Also nimmt $\exp(2\pi\mathrm{i}k/n)$ für $k \in \mathbb{Z}$ genau die n verschiedenen Werte

$$\varepsilon_n := \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}, \varepsilon_n^2 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}, \ldots \varepsilon_n^n = 1$$

an. Diese werden (komplexe) n–te *Einheitswurzeln* genannt.
Dementsprechend nimmt $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ die n Werte $\exp(1/n \ln a)$, $\varepsilon_n \cdot \exp(1/n \ln a)$, …, $\varepsilon_n^{n-1} \cdot \exp(1/n \ln a)$ an.
Wir schließen das Kapitel mit einer Warnung ab: **Im Allgemeinen gilt nicht:** $(z_1 z_2)^b = z_1^b z_2^b$.
Dies ist nur dann der Fall, wenn für die zur Definition der Potenz benutze Logarithmusfunktion $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$ erfüllt.