# Stichworte der Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie

(entstanden aus dem Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie Skript
von Herrn Prof Dr Potthof)

Author: Ralf Nicklas

Stand: 24. Januar 2006

# A

**a posteriori Wahrscheinlichkeiten :** $P(B_k|A)$

**absolut stetig verteilet :** siehe stetig verteilt

**antiton :** Folge $(A_n, n \in N)$ falls $A_{n+1} \subset A_n \forall n \in N$ gilt $\lim_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ falls $(A_n, n \in N)$ antiton ist

**Axiom zur $\sigma - Algebra$ :** Sei $\Omega$ der Grundraum der Elementarereignisse eines Experiments. Die Menge aller Ereignisse $\mathcal{A}$ ist eine Familie von Teilmengen von $\Omega$, die eine $\sigma - Algebra$ bildet.

# B

**Bayes'sche Formel :** Sei $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ eine Zerlegung von $\Omega$ mit $P(B_k) > 0$ k=1, $\ldots, n$ und $A \in \mathcal{A}$ mit P(A)¿0. Es gilt für $k \in \{1, \ldots, n\}$
$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)}$

**BBW :** = Brownsche Bewegung

**bedingte diskrete Dichte :** siehe diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

**BE :** = bedingte Erwartung

**bedingte Entropie :** mit bedingter Dichte $p(x_i, y_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)} = P(X = x_i|Y = y_j) \Rightarrow H(X, Y = y_j) = -\sum\limits_i log_2(p(x_i|y_j))p(x_i|y_j) = -\sum\limits_i log_2(p(x_i|Y))p(x_i|Y)$
**Lemma:** $H(X|Y) = H(Y) + E(H(X|Y))$
**Satz:** $E(H(X|Y)) \leq H(x)$

**bedingte Erwartung :** Eine ZV, die BE1 und BE2 erfüllt, heißt die bedingte Erwartung von X gegeben Y und wird mit E($X|Y$) notiert.

**bedingte Erwartung (Vorbereitung) :** Setze Z:= E($X|Y$) $\Rightarrow Z(\omega) = \sum\limits_i x_i p(x_i|y)\ \forall \omega \in \Omega$ mit $Y(\omega) = y \Rightarrow$ Z = $\sum\limits_i x_i p(x_i|Y)$ oder Z = $g \circ Y$ mit g(y) = $\sum\limits_i x_i p(x_i, y)$
$\Rightarrow BE1 - BE11$

**bedingte Erwartung 1 :** Z ist eine Funktion von Y, d.h. es gibt eine meßbare Funktion g, so dass Z($\omega$) = g(Y($\omega$)), $\omega \in \Omega$

**bedingte Erwartung 2 :** Für jedes $B \in \mathcal{B}(R)$ gilt: $\int\limits_{\{Y \in B\}} ZdP = \int\limits_{\{Y \in B\}} XdP$
$\Rightarrow \int\limits_{\{Y \in B\}} ZdP = \int\limits_{\{Y \in B\}} E(X|Y)dP = \cdots = \int\limits_{\{Y \in B\}} XdP$

**Fakt zwischen BE2 und BE3 :** Seien X,Y zwei ZV auf einem W-raum, X integreirbar oder positiv. Dann gibt es eine ZV Z, die die Eigenschaften BE1 und BE2 hat und fast sicher eindeutig ist (falls Z' eine andere solche ZV ist gilt P(Z=Z')=1 )

**bedingte Erwartung 3 :** E$(\cdot|Y)$ ist linear: seien $X_1, X_2$ reellwertige ZV $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Dann gilt fast sicher E$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|Y) = \alpha_1 E(X_1|Y) + \alpha_2(X_2|Y)$ außerdem: $\int f(Y)E(X|Y)dP = \int f(Y)XdP$

**bedingte Erwartung 4 :** Für jede meßbare Funktion f (derart, dass die Integrale existieren) gilt die Gleichung:
$\int f(Y)E(X|Y)dP = intf(Y)XdP$

**bedingte Erwartung 5 :** Für jede Konstante C gilt E$(C|Y)$ = C

**bedingte Erwartung 6 :** Für jede meßbare Funktion $\varphi$ gilt E$(\varphi(Y)X|Y) = \varphi(Y)E(X|Y)$

**bedingte Erwartung 7 :** $E(E(X|Y)|Y) = E(X|Y)$

**bedingte Erwartung 8 :** $E(E(X|Y)) = E(X)$

**bedingte Erwartung 9 :** $E(\cdot|Y)$ ist symmetrisch im Sinne, dass für alle X, Z $E(Z|E(X|Y)) = E(E(Z|Y)|X)$ gilt

**bedingte Erwartung 10 :** Sei $\varphi$ meßbar, Y=$\varphi(Z)$. Es gilt $E(E(X|Z)|Y) = E(X|Y)$

**bedingte Erwartung 11 :** Falls X und Y unabhängig sind, gilt $E(X|Y) = E(X)$

**bedingte Wahrscheinlichkeit :** Sei ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P) ein W-raum, $B \in \mathcal{A}$ mit P(B)¿0, $A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ = bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter B
$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

**Bernoullie-Experiment :** $\Omega = R$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R)$, $x_1, x_2 \in R$, $x_1 \neq x_2$, $p \in [0,1]$, $P_1 = \varepsilon_{x_1}$, $P_2 = \varepsilon_{x_2}$ dann ist P = p$\varepsilon_{x_1}$ + (1-p)$\varepsilon_{x_2}$
$\Leftrightarrow$ 2 Elemtarereignisse die nicht unmöglich sind

**Bernoullie-Zufallsvariable :** $P(X \in [a,b]) = \{ \begin{array}{ccc} p & falls & x_1 \in [a,b] + x_2 \notin [a,b] \\ 1-p & falls & x_1 \notin [a,b] + x_2 \in [a,b] \\ 1 & falls & x_1 \in [a,b] + x_2 \in [a,b] \\ 0 & sonst & \end{array}$
mit $x_1, x_2 \in R, x_1 \neq x_2, p \in [0,1]$ und W = $p\varepsilon_{x_1} + (1-p)\varepsilon_{x_2}$

**Binomialverteilte Zufallsvariable :** mit Parametern (n,p), $n \in N, p \in [0,1]$:
W = $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \varepsilon_k$
$\rightarrow$ wobei x fast sicher die Werte k = $0, \ldots, n$ annimmt und dabei den Wert k mit Wahrscheinlichkeit $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

**Borelmenge :** Sei $\Omega = R$: Es gibt eine kleinste $\sigma$-Algebra $\mathcal{B}(R)$, die alle Intervalle enthält (=Boral-$\sigma$-Algebra)
oder auch $\Omega = R^n$: $\mathcal{B}(R^n)$ ist kleinste $\sigma$-Algebra, die alle Hyperquader enthält.

**Brownsche Bewegung :** = Wienerprozess

**Brownsche Bewegung Eigenschaften :** * die BBW ist ein Markovprozess, da $P(B(t) \in A|\{B(u), u \leq s\}) = P(B(t) \in A|B(s))$ gilt
die BBW ist ein Martingal, da: sei $t \geq s > 0$
$E(B(t)|\{B(u), u \leq s\}) = \ldots = B(s)$

## C

**Cauchyverteilung :** f(x) = $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$

**Chapman-Kolmogorov-Gleichung :** Sei n, k in $N_0$ dann gilt für jede Wahl von m zwischen k und k+n und alle i,j in N
P(X(k+n)) = i(X(k)=j) = $\sum_l P(X(k+n)) = i(X(m=) = l)P(X(m) = l|X(k) = j)$

**charakteristische Funktion von X :** Sei f(x) = $e^{i\lambda x} = cos(\lambda x) + isin(\lambda x)$
$\Rightarrow \Phi(\lambda) = E(e^{i\lambda x})\ \lambda \in R$

## D

**Dichte :** Fall wie bei (absolut) stetig verteilt ⇒ f heißt die Dichte der Verteilung bzw. der Zufallsvariablen

**Diracmaß :** Sei Ω ein beliebiger Grundraum, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra von Ereignissen über Ω Ferner sei $\omega_0 \in \Omega$. Setze: P(A):={ $\begin{matrix} 1 & falls\, \omega_0 \in A \\ 0 & sonst \end{matrix}$ heißt Diracmaß in $\omega_0$ es wird mit $\varepsilon_{\omega_0}$ bezeichnet.

**diskret verteilt :** Sei $\{x_n, n \in N\} \in R$, $(p_n, n \in N)$, $p_n \in [0,1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, das Maß W = $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n \varepsilon_{x_n}$ ⇒ führt die Abbildung $A \mapsto W(A)$ zu einer Verteilung + damit zu einer diskret verteilten Zufallsvariablen

**diskrete Gleichverteilung :** $x_1, \ldots, x_n \in R$: W = $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{x_k}$

**diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung :** $P_X = \sum\limits_i p_x(x_i)\varepsilon_{x_i}; P_Y = \sum\limits_j p_Y(y_j)\varepsilon_{y_j}$ mit $p_X(x_i) = \sum\limits_j p(x_i, y_j); p_Y(y_j) = \sum\limits_i p(x_i, y_j)$ ¿ 0 ⇒ $P(X = x|Y = y) = \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(x,y)}{P_Y(y)} = p(x|y)$ Damit ist die Verteilung von X unter der Bedingung Y=y als diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung: $\sum\limits_i p(x_i|y)\varepsilon_{x_i}$ gegeben auf (R,$\mathcal{B}(R)$) mit p($x|y$) ist die bedingte (diskrete) Dichte von X gegeben Y=y gegeben. ⇒ bedingte Erwartung von X unter Y=y: E($X|Y = y$) := $\sum\limits_i x_i p(x_i|y)$ außerdem E($X|Y)(\omega)$:= E($X|Y = y$) für alle $\omega \in \Omega$ mit $Y(\omega) = y$

# E

**Elementarereignis :** $\omega \in \Omega$

**Entropie :** = mittlerer Informationsgehalt = mittlere Überaschung
E(S) $= -\sum_{i=1}^{n}(log_2(p_i))p_i = iH(x)$
man setzt auch: H(x):= $-\int_R (log_2(\varphi(x)))\varphi(x)dx$ mit $H(x) \leq log_2(n)$

**Ereignis :** A ist Menge von $\omega \Rightarrow A \subset \Omega,\ A \in \mathcal{P}(\Omega)$ insbesondere ordnet man $\omega \in \Omega$ das Ereignis $\{\omega\} \subset \Omega$ zu

**Ergodenkette für Markovketten :** Falls $k_0 \in N$ existiert, so dass $P_{i,j}(k_0) > 0$ für alle i,j in $\{1,\ldots,n\}$ dann ist die Markovkette ergodisch. Dabei ist der Invariante Zustand $\alpha$ der eindeutig bestimmte Eigenvektor von P zum Eigenwert 1

**Erwartungswert :** Sei X eine positive oder integrierbare Zufallsvariable auf einem W-raum ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P). Dann heißt $\int_A XdP$ der mathematische Erwartungswert oder Mittelwert von X
E(x) := $\int_\Omega XdP$

**Anmerkung:** E(g(X,Y)) = $\{ \begin{array}{ll} \int_{R^2} g(x,y)f(x,y)dxdy & \textit{gemeinsam stetig} \\ \sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)p_{ij} & \textit{gemeinsam diskret} \end{array}$

**Korollar:** $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig, $f_1,\ldots,f_n$ meßbar
E($f_1(X_1)\cdots f_n(X_n)$) = E($f_1(X_1)$)$\cdots$E($f_n(X_n)$)

**E bei X Bernoulli ZV :** E($f \circ X$) $= \int f(x)dP_x(X) = pf(1) + (1-p)f(0)$

**E bei X normalverteilt :** mit $\mu, \sigma \in R$ f=id:
E(X) $= \int x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})dx = \ldots = \mu$

**Exponentialverteilung :** $\lambda > 0$ $f(x) = \lambda 1_{R_+}(x)e^{-\lambda x}$

# F

# G

**Gaußfunktion :** f(x) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ mit $\mu, \sigma \in R$

**gemeinsame Entropie :** X,Y ZVs mit gemeinsamer Verteilung $P_{X\otimes Y} = \sum_{i,j} p(x_i,y_j)\varepsilon(x_i,y_j)$
$\Rightarrow$ H(X,Y) $= -\sum_{i,j} log_2(p(x_i,y_k))p(x_i,y_k)$

**gemeinsame Verteilung :** V W-maß auf $(R^2, \mathcal{B}(R^2))$, $\Omega = R^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R^2)$, P = V, X = $\pi_1$, Y = $\pi_2$, $\pi_i = i-teProjektion$ d.h. $\omega$=(x,y)$\in R^2$ ist $\pi_1(\omega) = x$, $\pi_2(\omega) = y$. Dann haben X, Y die gemeinsame Verteilung V

**gemeinsame Verteilungsfunktion :** wähle B = $(-\infty, x) \times (-\infty, x)$, x,y$\in R$ dann heißt
$F_{X \circ Y}((x,y)) = P_{X \circ Y}((-\infty, x) \times (-\infty, y)) = P(X < x, Y < y)$ die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y

**geometrische Brownsche Bewegung :** Sei T=$R_+$ X(t):=$e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ $t \in R_+$ mit $\lambda \in R$: Der stochastische Prozess $(X(t), t \in R_+)$ wird geometrische BBW genannt und ist ein Martingal

**geordent ohne Wiederholung :** falls, man auf die Reihenfolge der Auswahl achtet und kein element mehr als einmal gewählt werden darf
$\Rightarrow (\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k})$ $(k \leq n)$ = k-Tupel

**geordent mit Wiederholung :** falls die Reihenfolge registriert wird und die Elemente wiederholt ausgewählt werden dürfen
$\Rightarrow (\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k})$ = k-Tupel mit Einträgen aus $\Omega$

**Gleichverteilung auf [a,b** :] sei a,b $\in R$, a¡b, f = $(b-a)^{-1} 1_{[a,b]}$
W(A) = $\frac{1}{b-a} \int\limits_A 1_{[a,b]}(x)dx = \frac{\lambda(A \cap [a,b])}{b-a}$
wobei $\lambda$ = Labesguemaß auf $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$ ist

**GM :** geordnet mit Wiederholung

**GO :** geordnet ohne Wiederholung

**größte $\sigma$-Algebra :** $\mathcal{P}(\Omega)$

**Grundmenge :** $\Omega$ = sicheres Ereignis

# H

**'hit and miss'-Monte-Carlo-Methode :** man schätzt die Fläche unter dem Graphen von f dadurch, dass man n viele Punkte gleichverteilt im Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ erzeugt und den Anteil bestimmt der unter dem Graphen liegt. Seien X, Y unabhängig auf $[0,1]$ gleichverteilte ZVs setze Z = $1_{\{Y \leq f(X)\}}$ (= Bernoullie-ZV) $\Rightarrow$ $p = \int\limits_0^1 f(x)dx$ und es gilt E(Z) = p
$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum\limits_1^n Z_k \rightarrow_{n \to \infty} \int\limits_0^1 f(x)dx$

**Hypothese :** $B_k$

# I

**Irrfahrt :** Sei T = $N_0$ und betrachte eine uiv Folge $(Y(n), n \in N)$ von Bernoullizufallsvariablen zu Parameter $p \in [0,1]$, mit Werten -1 und 1, $P(Y_i = 1) = p$. Setze X(0) = 0 und X(n) := $\sum\limits_{i=1}^n Y(i)$ $n \in N \Rightarrow$ der stochastische Prozess $(X(n), n \in N_0)$ heißt Irrfahrt.

**isoton :** Folge $(A_n, n \in N)$ falls $A_n \subset A_{n+1} \forall n \in N$ gilt $\lim\limits_n A_n := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ falls $(A_n, n \in N)$isoton ist

## J

## K

**kleinste $\sigma$-Algebra :** $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$

**Kodierung :** X nehme die Werte $x_1, \ldots, x_N, N \in \mathbf{N}$ an. Es gibt genau dann eine binäre Kodierung von $x_1, \ldots, x_N$ mit Längen $n_1, \ldots, n_N$, wenn gilt $\sum\limits_{i=1}^{N} 2^{-n_i} \leq 1$

Kodierung ist möglich falls für alle n in N gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} 2^{-j}\omega_j \leq 1 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{N} 2^{-n_i} \leq 1$

**Konstruktionsprinzip :** Sei W W-maß auf (R,$\mathcal{B}(R)$). Dann gibt es einen W-raum ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P) und darauf eine Zufallsvariable X, so dass W gleich der Verteilung $P_X$ von X ist. Man wählt ganz einfach:
$\Omega = R$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R)$, P = W, X = id
$\Rightarrow X(\omega) = \omega$ für $\omega \in \Omega = R$ noch zu zeigen dass $P_X = W$ $P_X((-\infty, x)) = P(X \in (-\infty, x)) = P(\{\omega, X(\omega) < x\}) = P(\{\omega, \omega < x\}) = W(\{\omega, \omega < x\}) = W((-\infty, x))$

**Konvergenz (eidwt) :** $(X_n, n \in N)$ sei eine Folge von reellwertigen ZVs auf einem W-raum ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P), X sei ZV auf ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P)
i) $(X_n, n \in N)$ konvergiert fast sicher gegen X, wenn $P(\{\omega; X_n(\omega) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} X(\omega)\}) = 1$
ii) $(X_n, n \in N)$ konvergiert stochastisch gegen X, wenn für jedes $\epsilon > 0$: $P(\{\omega; |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$
iii) $(X_n, n \in N)$ konvergiert in Verteilung gegen X, wenn die Folge $(P_{X_n}, n \in N)$ der Verteilung von $(X_n, n \in N)$ schwach gegen die Verteilung $P_X$ konvergiert, d.h. wenn für alle beschränkte, stetige Funktionen f: $\int f(x)dP_{X_n}(x) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \int f(x)dP_X(x)$ gilt
iv) $(X_n, n \in N)$ konvergiert im p-ten Mittel oder in L'(P), $p \geq 1$ gegen X falls $\int\limits_\Omega |X_n - X|^p dP \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$

$$\begin{bmatrix} & & KV\ in\ L'(P),\ p \geq 1 \\ & & \Downarrow \\ fast\ sichere\ KV \Rightarrow & stochastische\ KV & \Leftarrow KV\ in\ L^1(P) \\ & \Downarrow & \\ & KV\ in\ Verteilung & \end{bmatrix}$$

**Korrelation :** Falls die Varianz V(X), V(Y) verschwinden, so heißt die Größe $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$ die Korrelation

**Kovarianz :** Sei X, Y quadratintegrierbare ZV. Dann heißt
Cov(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) die Kovarianz von X und Y

**Korollar:** Sei X und Y unabhängig mit endlicher Varianz, dann sind X und Y unkorreliert: Cov(X,Y) = 0

**KV :** = Konvergenz

# L

**Laplace-Experiment :** endlicher Grundraum und alle elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich. hier gilt:
p = $\frac{1}{n} \Rightarrow$ P(A) = $\frac{|A|}{|\Omega|} = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\}) = k \cdot \frac{1}{n}$ mit A = $\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$

**Lebesguemaß :** Sei $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0,1])$, d.h. unser Experiment produziert eine reelle Zahl zwischen 0 und 1. Es gibt ein W-maß $\lambda$, das jedem Intervall $[a,b]$ in $[0,1]$ als W-keit dessen Länge zuordnet: $\lambda([a,b]) = b - a$

**Lemma i (eidwt) :** Sei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig. Dann gilt $P_{X_1+\cdots+X_n} = P_{X_1} \cdots P_{X_n}$

**Lemma ii (eidwt) :** Sei $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZVs mit momenterzeugende Funktionen $\psi_{X_1}, \ldots, \psi_{X_n}$. Dann gilt $\psi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \psi_{X_1}(t) \cdots \psi_{X_n}(t) t \in R$ Falls $X_1, \ldots, X_n$ uiv ZVs sind, gilt insbesondere $\psi_{X_1+\cdots+X_n}(t) = (\psi_{X_1}(t))^n$

**Lemma zur bedingten Wahrscheinlichkeit :** Sei $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ dann gilt P$(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$

**Lemma zu meßbar und Zufallsvariablen :** Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ vorgelegt, g eine meßbare Funktion von $\Omega$ nach R, f eine meßbare Funktion von R nach R. Dann ist $f \circ g$ meßbar
$\Leftrightarrow$ Die Komposition meßbarer Abbildungen ist meßbar
$\Rightarrow f \circ X$ ist eine Zuvallsvariable

# M

**Markoveigenschaft :** $P(X(n+1) \in B|X(0), \ldots, X(n)) = P(X(n+1) \in B|X_n)$
**Interpretattion:** Der Prozess hat kein Gedächtnis

**Markovprozess :** Prozess mit ME z.B. Irrfahrt

**Martingal :** ein stochastischer Prozess $(X(n), n \in N)$ mit der Eigenschaft MTG für alle n in N heißt Martingal z.B. ist die Irrfahrt ein Martingal wenn p=$\frac{1}{2}$ ist

**Martingalkette :** $(X(t), t \in T)$ ein stochastischer Prozess mit diskreter Zeit T=$N_0$ oder T=$\{0, \ldots, n\}$ der die Markoveigenschaft erfüllt $\Leftrightarrow$ Markovkette

**Maß :** Sei $\Omega$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$, P eine Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\bar{R}_+ := [0, +\infty]$
P heißt Maß, falls gilt:
i) P(

$oslash) = 0$
ii) P ist $\sigma$-additiv: falls $(A_n, n \in N)$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathcal{A}$ ist, so gilt: P( $_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

**ME :** = Markoveigenschaft

**meßbar :** Sei $\Omega$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra über $\Omega$, f eine reellwertige Funktion auf $\Omega$ mit $f^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A} \forall x \in R$
$\Rightarrow$ f heißt meßbar
**Fakt:** f ist genau dann meßbar, wenn für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(R)$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ gilt

**Methode der kleinsten Fehlerquadrate nach Gauß-Laplace :** Die größte $E((X - g(Y))^2)$, g meßbare Funktion, hat bei g(Y) = $E(X|Y)$ ihr Minimum

**Mittelwert :** siehe Erwartungswert

**mittlerer Informationsgehalt :** = Entropie = mittlere Überraschung

**mittlere Überaschung :** = Entropie = mittlerer Informationsgehalt

**Moment :** siehe auch n-tes Moment

**momenterzeugende Funktion von X :** $\psi(\lambda) = E(e^{\lambda X})$ $\lambda \in R$

**Monte-Carlo-Methoden :** Methoden zur numerischen Berechnung von Integralen zum Beispiel siehe auch:
'hit and miss'-Monte-Carlo-Methode
zweit Monte-Carlo-Methode

**MTG :** = Martingaleigenschaft (siehe auch Martingal)
$E(X(n+1)|X(1), \ldots, X(n)) = X(n)$

# N

**n-tes Moment :** Sei X ZV: E($X^n$) heißt das n-te Moment von X
siehe Erwartungswert

**Normalverteilung :** N($\mu, \sigma^2$), $\mu, \sigma \in R$:
W(A) = $\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) dx$ $A \in \mathcal{B}(R)$

# O

**$\omega$ :** $\omega$ = Elementarereignis

**$\Omega$ :** $\Omega$ = Grundraum aller Elemtarereignissen

# P

**Pfad :** von einem stochastischen Prozess X ist eine zufällige reellwertige Funktion auf T

**Poissonprozess :** T=$R_+$, $(X(t), t \geq 0)$ ein stochastischer Prozess mit
i) X(0) = 0 fast sicher
ii) unabhängige, stationäre Zuwächse
iii) die Zuwächse X(t) - X(s), s¡t habe die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda(t-s),\ \lambda > 0$
heißt Poissonprozess mit Rate $\lambda$
$\rightarrow$ Markovprozess aber kein Martingal

**Poisonverteilung :** mit Parameter $\lambda > 0$: W = $e^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \varepsilon_k$
$\Rightarrow$ X nimmt fast sicher Werte in $N_0$ an, dabei für $k \in N$
P(x=k) = $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

**Produktmaß :** siehe Versuchsreihe
$P_1 \otimes P_2 = P$

# Q

# R

**realisiert :** Ist A Ereignis und gilt $\omega \in A \Rightarrow \omega$ realisiert A

# S

**S1 :** S(1) = 0

**S2 :** S strikt monoton fallend auf $(0, 1]$

**S3 :** S ist stetig auf $(0, 1]$

**S4 :** S(pq) = S(p) + S(q) für alle p,q in $(0, 1]$

**Satz von Bayes :** Sei $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ eine (paarweise disjunkte) Zerlegung von $\Omega$ d.h. $\Omega = \ _{k=1}^{n} B_k$
Dann kann man jedes Ereignis $A \in \mathcal{A}$ nach $\{B_k, k = 1, \dots, n\}$ zerlegen: $A = \ _{k=1}^{n}(B_k \cap A)$
$Rightarrow P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k \cap A)$

**Satz von Bienaym :** $X_1, \dots, X_n$ seien paarweise unkorrelierte ZVs. Dann gilt:
V($X_1 + \cdots + X_n$) = V($X_1$)+ $\cdots$ +V($X_n$)

**Satz von Fubini :** Sei f reellwertig, meßbare Funktion auf $\Omega_1 \times \Omega_2$
a) Für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ ist die Funktion f$(\omega_1, \cdot)$ auf $\Omega_2$ meßbar
b) Falls für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ die Funktion f$(\omega_1, \cdot)$ positiv oder $\mu_2$-integrierbar ist, dann ist die Funktion $\omega_1 \mapsto \int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu(\omega_2)$ auf $\Omega_1$ meßbar
c) f ist $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar$\Leftrightarrow \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| d\mu_2(\omega_2)) d\mu_1(\omega_1) < +\infty$
d) amaloge Aussage zu a), b) und c) gelten mutatis mutandis, wenn die Rolle der Indizes 1 und 2 vertauscht ist
e) Falls f positiv oder $\mu_1 \otimes \mu_2$-integrierbar ist, dann gilt $\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\mu_1 \otimes \mu_2 =$
$\int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_2(\omega_2)) d\mu_1(\omega_1) \int\limits_{\Omega_2} (\int\limits_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) d\mu_1(\omega_1)) d\mu_2(\omega_2)$
**Merke:** Dei der Integration bezüglich eines Produktmaßes kann man die Integration Variable für Variable durchführen und es kommt nicht auf die Reihenfolge der Integration an.

**Satz von Poisson :** Sei $(X_n, n \in N)$ eine Folge von binomialverteilte ZV, wobei $X_n$ Parameter (n,$p_n$) mit $\lim\limits_n np_n = \lambda > 0$ hat. Dann konvergiert $(X_n, n \in N)$ in Verteilung gegen eine Poissonzufallsvariable mit Parameter $\lambda$

**Satz von Shannon :** Für jede Kodierung C einer ZV X mit Werten $x_1, \ldots, x_N$ gilt $E(L_C) \geq H(X)$

**Satz zum Produkt :** Gegeben seien k Mengen $M_1, \ldots, M_k$ mit $|M_i| = n_i \in N$, i=$1, \ldots, k$. Dann ist die Anzahl aller k-Tupel der Form $(m_1, \ldots, m_k)$; $m_i \in M_i$ i=$1, \ldots, k$ gleich
$\prod\limits_{i=1}^{k} n_i$

**Satz zur Anzahl der Möglichkeiten :** zu den verschiedenen Proben gibt es jeweils die folgende Anzahl von Möglichkeiten:
**GO**: $\frac{n!}{(n-k)!}$ Maxwell-Boltzmann-Statistik
**UO**: $\binom{n}{k}$ Fermi-Dirac-Statistik
**GM**: $n^k$
**UM**: $\binom{n+k-1}{k}$ Bose-Einstein-Statistik

**Satz zur gemeinsamen Verteilung und dem Produktmaß :** Seien die ZV $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig. Dann ist die gemeinsame Verteilung $P_{X_1 \oplus \cdots \oplus X_n}$ gleich dem Produktmaß $P_{X_1} \oplus \cdots \oplus P_{X_n}$ der Verteilung

**$\sigma -$ Algebra :** Sei $\Omega$ eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von $\Omega$ dann heißt $\mathcal{A}$ $\sigma$-Algebra falls gilt:
i) $\Omega \in \mathcal{A}$
ii) für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $A^c \in \mathcal{A}$
iii) für jede Folge $(A_n, n \in N) \in \mathcal{A}$ gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
Bsp) $\mathcal{A} = \{\Omega, A, A^c, \oslash\}$

**Standardabweichung :** siehe Streuung

**Starkes Gesetz der großen Zahlen :** Sei $(X_n, n \in N)$ eine unabhängige Folge von identisch verteilte ZVs, deren viertes Moment existiert. $E(X_1^4)$ ¡ $-\infty$. Dann konvergiert $\frac{s_n}{n}$ mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$ fast sicher gegen $E(X_1)$

**Stetigkeit von W-maßen :** Sei $(A_n, n \in N)$ eine isotone oder antitone Folge von Ereignissen. Dann gilt:
$P(\lim_n A_n) = \lim_n P(A_n)$

**(absolut) stetig verteilt :** $f \geq 0$ stückweise stetige Funktion mit $\int f(x)dx = 1 \Rightarrow$ führt die Abbildung $A \mapsto W(A) = \int_A f(x)dx$ zu einer Verteilung + damit zu einer (absolut) stetig verteilten Zufallsvariablen

**Stetigkeitslemma von P. Lvy :** Sei $(Y_n, n \in N)$ eine Folge von ZV mit existierenden momenterzeugenden Funktionen: $\psi_{Y_n}(t) = E(exp(tY_n)) < +\infty$ mit t in R und n in N. Ferner sei Y ZV mit existierender momenterzeugender Funktion $\psi_Y$. Falls $\psi_{Y_n}$ punktweise gegen $\psi_Y$ konvergiert, so konvergiert $Y_n$ in Verteilung gegen Y.

**stochastischer Prozess :** Sei T eine Teilmenge von $R_+$, $(\Omega,\mathcal{B},P)$ ein W-raum, $(E,\mathcal{E})$ ein meßbarer Raum (d.h. eine Menge, die mit einer $\sigma$-Algebra ausgestattet ist). Eine Abbildung T in einer Menge von ZV über $(\Omega,\mathcal{B},P)$ mit Wertebereich E heißt stochastischer Prozess mit Zustandsraum E. (Die Menge T wird typischerweise als Bereich eines Zeitparameters aufgefasst. Gebräuchlich sin $T \setminus N, R_+$)
**Notationen:**
$X(t)(\omega) \equiv X(t,\omega) \equiv X_t(\omega)$ mit t in T und $\omega \in \Omega$

**Streuung :** von X: $\sqrt{V(X)}$ (oder auch Standardabweichung)

# T

**Transformationssatz :** Sei $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum, $(\Omega',\mathcal{A}')$ Meßraum, g meßbare Abbildung von $\Omega$ nach $\Omega'$. Auf $(\Omega',\mathcal{A}')$ sei $\mu_g(A') := \mu(g^{-1}(A'))$, A' $\in \mathcal{A}'$ ein Maß. Sei f reellwertige, meßbare Funktion auf $\Omega'$, die positiv oder $\mu_g$-integrierbar ist. Dann gilt $\int_\Omega f \circ g d\mu = \int_{\Omega'} f d\mu_g$ **Fakt:** sei $P_x(B) = \int_B \phi(x)dx B \in \mathcal{B}(R)$ mit $\phi(x)$ stückweise stetig, sowie $\phi \geq 0$ und $\int_R \phi(x)dx = 1$ sei f stückweise stetig und somit messbar und so dass das (uneigentliche) Riemanintegral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\phi(x)dx$ endlich ist. Dann gilt:

$\int_R f dP_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx$

$\Rightarrow E(f \circ X) = \int_R f dP_x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx$ mit X ZV und $\phi$ Dichte
**Lemma:** Sei $P_x = \sum_n \alpha_n \varepsilon_{x_n}$, f meßbar und so dass die Reihe $\sum_n \alpha_n f(x_n)$ absolut konvergiert. Dann gilt: $\int_R f dP_x = \sum_n \alpha_n f(x_n)$

# U

**Überraschung :** S als Funktion der W-keit $p \in [0,1]$, p=0 bei großem S und p=1 bei kleinem S siehe S1-S4
**Satz:** Eine Funktion auf $(0,1]$, die S1-S4 erfüllt ist von der Form: S(p) = -C $log_2(p)$ wobei C eine positive Konsante ist. (Konvention: C=1)

**UM :** ungeordent mit Wiederholung

**unabhängig (eidwt) :** Sei $(X_n, n \in N)$ eine Folge von ZV aif einem W-raum ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P). Sie heißt unabhängig, falls für jedes $n \in N$, jede Wahl von $k_1, \ldots, k_n \in N$ und jede Wahl $x_{k_1}, \ldots, x_{k_n} \in R$,
P$(X_{k_1} < x_{k_1}, \ldots, X_{k_n} < x_{k_n}) = \prod_{l=1}^{n} P(X_{k_l} < x_{k_l})$gilt

**unabhängig (2 Ereignisse) (eidwt) :** Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Sie heißen unabhängig falls für jede Wahl von $k \in \{1, \ldots, n\}$ und jede Wahl von k Ereignissen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ die Gleichung $P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$ gilt
$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$

**unabhängige standard normalverteilte Zustandsvariable :** Seien $U_1$ und $U_2$ zwei unabhängige auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV
setze: X=$\sqrt{-2ln(U_1)}cos(2\pi U_2)$; Y=$\sqrt{-2ln(U_1)}sin(2\pi U_2)$ dann sind X,Y unabhängige standard normalverteilte ZVs.

**uiv :** = unabhängig identisch verteilt

**Unabhängigkeit von Zufallsvariablen :** $X_1, \ldots, X_n\, n \in N$ wenn alle Ereignisse der Form $\{X_i \in B_i\}$, $B_i \in \mathcal{B}(R)$ i=$1, \ldots, n$ unabhängig sind.

**ungeordent mit Wiederholung :** falls man nicht die Reihenfolge berücksichtigt und die Elemente wiederholt ausgewählt werden dürfen
$\Rightarrow \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ $(k \leq n)$ = Menge und $\forall j \neq k$ gilt $\omega_{i_j} \neq \omega_{i_k}$

**ungeordent ohne Wiederholung :** falls man die Reihenfolge nicht registriert und kein Element mehr als einmal gewählt werden darf
$\Rightarrow < \omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k} >$ $(k \leq n)$ = Sammlung von Elementen aus $\Omega$ mit Vielfachheit zwischen 0 und k

**unkorreliert :** falls Cov(X,Y) = 0 und damit $\rho(X,Y) = 0$ gilt, so heißt X und Y unkorreliert.

**UO :** ungeordnet ohne Wiederholung

# V

**Varianz :** Die Größe V(X) = E($(X - E(X))^2$) heißt Varianz

**Versuchsreihe :** unabhängige Ausführung von Experimenten Bsp: 2 Experimente
W-räume ($\Omega_1$,$\mathcal{A}_1$,$P_1$), ($\Omega_2$,$\mathcal{A}_2$,$P_2$) $\Rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2)\}$ ist der grundraum aller $\omega$ das kombinierte Experiment (zuerst 1., dann 2.) $A_1 \times A_2 =$ im Experiment1 tritt $A_1$ und in Experiment2 tritt $A_2$ ein definiere $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ als kleinste $\sigma$-Algebra die alle Ereignisse $A_1 \times A_2$ enthält $\Rightarrow$ P($A_1 \times A_2$) $:= P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)$ heißt Produktmaß

**Verteilung :** Sei ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P) ein W-raum, X feste Zuvallsvariable. Dann können wir für jedes $B \in \mathcal{B}(R)$ den Wert $P(X \in B) = P(X^{-1}(B))$ ermitteln $\Rightarrow$ Abbildung $P_X$ von $\mathcal{B}(R)$ und $[0,1] : P_X(B) := P(X \in B)$
$\Rightarrow P_X = Verteilung \rightarrow$ Die Funktion F(x) $= P_X((-\infty, x)) = P(X < x)$ heißt Verteilungsfunktion von X
**Satz:** $P_X$ ist ein W-maß auf (R,$\mathcal{B}(R)$)

## W

**Wärmeleitungsgleichung :** Verteilung B(t), Dichte p(t,x) $\Rightarrow$ WLGL: $(\frac{\delta}{\delta t} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\delta x^2})p(t,x) = 0$

**Wärmeleitungskern :** siehe Wienerprozess

**W-keit :** = Wahrscheinlichkeit

**W-maß :** = Wahrscheinlichkeitsmaß

**W-raum :** = Wahrscheinlichkeitsraum

**Wahrscheinlichkeit :** Sei $\Omega$ der Grundraum aller Elementarereignisse eines Experiments, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra von Ereignissen. Falls P ein W-maß auf ($\Omega$,$\mathcal{A}$) ist, so heißt für iedes $A \in \mathcal{A}$, P(A) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

**Wahrscheinlichkeiten :** $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ endlich, falls wir wählen $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ dann können wir P($\{\omega_i\}$) $= p_i$ für die W-keit des Ereignisses setzen.
$\Rightarrow$ wir erhalten ein W-maß auf ($\Omega$,$(P)(\Omega)$)
P(A) $= \sum\limits_{j=1}^{k} P(\{w_{i_j}\}) = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$ mit A $= \{w_{i_1}, \ldots, w_{i_k}\}$

**Wahrscheinlichkeitsmaß :** Es werden alle Voraussetzungen von einem Maß benötigt und dazu:
iii) P($\Omega$) = 1

**Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\alpha$ :** Sei $\Omega$ ein Grundraum, $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Algebra, $P_1, \ldots, P_n$ W-maße, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Zahlen in $[0,1]$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$
$\Rightarrow P := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k P_k \Rightarrow P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k P_k(A)\ A \in \mathcal{A}$

**Wahrscheinlichkeitsmaß mit Integral :** Sei $\Omega = \mathrm{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(R)$, f stückweise stetig + positiv mit
$\int_R f(x)dx = 1$ dann definiert:
P(A) := $\int_A f(x)dx$, $A \subset \mathcal{B}(R)$ ein W-maß auf (R,$\mathcal{B}(R)$)

**Wahrscheinlichkeitsraum :** Das Tripel ($\Omega$,$\mathcal{A}$,P) heißt Wahrscheinlichkeitsraum

**Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretationen für Operationen auf Mengen :**
$\Omega$ = sicheres Ereignis, $\oslash$ = unmögliches Ereignis
$A \cup B$ = A oder B tritt ein , $A \cap B$ = A und B tritt ein
$A^c$ = A tritt nicht ein , $A \triangle B$ = entweder A oder B tritt ein
$A \setminus B$ = A tritt ein und B nicht , $A \subset B$ = A zieht B nach sich
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ = für ein gewisses $n \in N$ tritt $A_n$ ein
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ = für alle $n \in N$ tritt $A_n$ ein
$\lim_n inf(A_n) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ = für fast alle $n \in N$ tritt $A_n$ ein
$\lim_n sup(A_n) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ = für unendlich viele $n \in N$ tritt $A_n$ ein

**Wienerprozess :** Wir wählen T=$R_+$ als Bereich für den Zeitparameter. Ein Prozess B=(B(t), $t \geq 0$) heißt Wienerprozess falls gilt:
i) B(0) = 0 (fast sicher)
ii) B hat unabhängige, stationäre Zuwächse
iii) der Zuwachs B(t) - B(s), $0 \leq s \leq t$ ist N(0,t-s)-verteilt
iv) die Pfade von B sind fast sicher stetig
Meist ist es die Dichte $f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)$ in dem Zeitpunkt $t_1,\ldots,t_n$ der gemeinsam verteilten ZVs $B(t_1),\ldots,B(t_n)$ zu kennen. $\Rightarrow$ Falls $0 < t_1 < \ldots < t_n$ gilt: $f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n) = p(t_1,x_1)p(t_2-t_1,x_2-x_1)\cdots p(t_n-t_{n-1},x_n-x_{n-1})$ wobei $p(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}exp(-\frac{x^2}{2t})$ $x \in R, t > 0$ der sogenannte Wärmeleitungskern ist

# X

# Y

# Z

**Zentraler Grenzwertsatz :** Sei $(X_n, n \in N)$ eine Folge von uiv ZVs mit E$(X_1) = \mu$ und V$(X_1) = \sigma$ ¿ 0. Falls die momenterzeugende Funktion $\psi_{X_1}$ auf ganz R endlich und in einer Umgebung des Ursprungs zweimal stetig diffbar ist, dann konvergiert die Folge $(Z_n, n \in N)$, definiert durch $Z_n = \frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ $, n \in N$

**Zufallsvariable :** Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein W-raum, so heißt eine meßbare Abbildung X von $\Omega$ nach R eine Zufallsvariable

**Zufallszahlenalgorithmus :** $Z_n = a \cdot Z_{n-1} + cmodM \qquad (Z_0 = seed)\ a, c, M \in N$ = kongruente Generatoren mit c=0 == multiplikativ kongruente oder einfach kongruente Generatoren
**Lemma:** Sei X stetig verteilt mit Dichte $f_x$ und Verteilungsfunktion $F_x$ $F_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_x(y)dy,\ x \in R$. Dann ist die ZV $F_x \circ X$ auf $[0, 1]$ gleichverteilt.
**Korollar:**Sei U eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte ZV. Dann hat $F_x^{-1} \circ U$ dieselbe Verteilung wie X = Mthode der inversen Verteilungsfunktion = Transformationsmethode

**Zustandsraum :** siehe stochastischer Prozess

**ZV :** = Zufallsvariable

**zweidimensionale Brownsche Bewegung :** BBW in der Ebene = 2 BBW: jeweils für die x- und y-Koordinate: B(t) = $(B_1(t), B_2(t))$

**zweite Monte-Carlo-Methode :** Sei Z=$f \circ X$ wobei X eine auf $[0, 1]$ gleichverteilte ZV. Dann gilt mit dem Transformationssatz E(Z) = $\int\limits_0^1 f(x)dx \Rightarrow$ fast sicher
$\frac{1}{n} \sum\limits_0^1 f(x)dx$

**Zylindermenge :** $((\Omega_n, A_n, P_n)n \in N)\ \Omega = \prod\limits_{n \in N} \Omega_n\ \omega \in \Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$
$\mathcal{A} = \otimes \mathcal{A}_n$ mit A = $A_1 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ wobei nur endlich viele $A_n \in \mathcal{A}_n$ verschieden von $\Omega_n$ sind
$\Rightarrow A = \Omega_1 \times \cdots \times A_{i_1} \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times A_{i_2} \times \cdots \Rightarrow P(A) = P_{i_1}(A_{i_1}) \cdots P_{i_k}(A_{i_k})$

# Inhalt