Funktionentheorie I — Klausur

SS 2009

Prof. Dr. B. Dreseler
Dipl. Math. T. Krüger *16.07.2009*

Aufgabe 1

Bestimmen und skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen, deren Zweifaches einen Abstand kleiner eins von i hat. Ist diese Menge ein Gebiet in $\mathbb{C}$?

Lösung 1

Es ist $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |2z - i| < 1\}$ die hier relevante Menge.
Wir setzen wie üblich $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |2z - i| < 1 &\Leftrightarrow |2x + i(2y-1)|^2 < 1^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + (2y-1)^2 \ < 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y - 1/2)^2 < (1/2)^2 \end{aligned}$$

Also ist M der offenen Kreises in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt $i/2$ und Radius $1/2$ und damit ein Gebiet.

Aufgabe 2

In welchen Punkten der komplexen Ebene sind die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, komplex differenzierbar, holomorph?

(a) $f(z) := \exp\left(\overline{z^2}\right)$

(b) $f(x+iy) := x^3y^2 + i\ x^2y^3 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

Lösung 2

Wir setzen wie üblich $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{aligned} f(x+iy) = \exp(\overline{(x+iy)^2}) &= e^{x^2-y^2-2ixy} = e^{x^2-y^2}e^{-2ixy} \\ &= e^{x^2-y^2}\left(\cos(2xy) - i\sin(2xy)\right). \end{aligned}$$

Offenbar sind Real- und Imaginärteil der Funktion überall stetig partiell differenzierbar, somit f überall reell differenzierbar. Damit f auch komplex differenzierbar ist, muss gelten:

$$\partial_{\overline{z}} f(z_0) = 2\overline{z}_0 e^{\overline{z_0}^2} \overset{!}{=} 0.$$

Damit ist f nur in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar und nirgends holomorph.

(b) Setze $f(x+iy) =: u(x,y) + i\,v(x,y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= 3x^2y^2 & v_y(x,y) &= 3x^2y^2 \\ u_y(x,y) &= 2x^3y & -v_x(x,y) &= -2xy^3 \end{aligned}$$

f ist damit überall reell differenzierbar (partielle Ableitungen existieren und sind stetig). Nach Cauchy-Riemann liegt komplexe Differenzierbarkeit für alle Punkte vor, welche die Gleichung $x^3y + xy^3 = xy(x^2+y^2) = 0$ erfüllen. Also ist f gerade auf den Koordinatenachsen komplex differenzierbar und die Funktion ist nirgends holomorph.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Wert von

$$\int_\gamma \mathrm{Im}(z)\,dz$$

(a) mit $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := it^2(t-i)$.
(b) mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \cos(\pi t) + it$.

Lösung 3

(a) Es gilt $\gamma(t) = it^3 + t^2$ sowie $\gamma'(t) = 2t + 3it^2$ und damit

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathrm{Im}(z)\,dz &= \int_{-1}^{1} t^3(2t+3it^2)\,dt = \int_{-1}^{1} (2t^4 + 3it^5)\,dt \\ &= \left[2/5\ t^5 + i/2\ t^6\right]_{-1}^{1} = 4/5 \end{aligned}$$

(b) Hier gilt $\gamma'(t) = -\pi\sin(\pi t) + i$.

$$\begin{aligned} \int_\gamma \mathrm{Im}(z)\,dz &= \int_0^1 t(-\pi\sin(\pi t) + i)\,dt = -\pi\int_0^1 t\sin(\pi t)\,dt + i\int_0^1 t\,dt \\ &= -\pi\left[-t/\pi\cos(\pi t)\Big|_0^1 + 1/\pi\int_0^1 \cos(\pi t)\,dt\right] + i/2 \\ &= -1 - 1/\pi\sin(\pi t)\Big|_0^1 + i/2 = -1 + i/2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie für das Integral

$$\int_{\kappa(r,z_0)} \frac{e^{1-z}}{z^2 - z^3}\, dz$$

für die Fälle

$$\text{(a) } z_0 = 0,\ r = \frac{1}{2},$$
$$\text{(b) } z_0 = 2,\ r = \frac{3}{2}.$$

Lösung 4

Schreibe zunächst $z^2 - z^3 = -z^2(z-1)$. Der Integrand besitzt also einen Pol der Ordnung 1 in 1 und einen Pol der Ordnung 2 in 0.

(a)

$$\int_{\kappa(1/2,0)} \frac{e^{1-z}}{z^2 - z^3}\, dz = -\int_{\kappa(1/2,0)} \frac{\frac{e^{1-z}}{z-1}}{(z-0)^2}\, dz = -\frac{2\pi i}{(2-1)!} \left(e^{1-z}(z-1)^{-1}\right)' \Big|_{z=0}$$
$$= -2\pi i \left[-e^{1-z}(z-1)^{-1} - e^{1-z}(z-1)^{-2}\right] \Big|_{z=0} = -2\pi i\,[e - e] = 0$$

(b)

$$\int_{\kappa(3/2,2)} \frac{e^{1-z}}{z^2 - z^3}\, dz = -\int_{\kappa(3/2,2)} \frac{\frac{e^{1-z}}{z^2}}{z-1}\, dz = -2\pi i\, \frac{e^{1-z}}{z^2} \Big|_{z=1} = -2\pi i$$

Aufgabe 5

Entwickeln Sie

$$\frac{1}{a^2 + z^2} \quad (a > 0)$$

in den folgenden Gebieten in eine Laurentreihe um 0:

$$\text{(a) } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\},$$
$$\text{(b) } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > a\}.$$

Lösung 5

(a)

$$\frac{1}{a^2 + z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - (-(z/a)^2)} \overset{|z|<a}{=} \frac{1}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a^{-2n} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, a^{-2n-2} z^{2n}$$

(b)

$$\frac{1}{a^2+z^2} \overset{z\neq 0}{=} \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(-(a/z)^2)} \overset{|z|>a}{=} \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, a^{2n}z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, a^{2n}z^{-2n-2}$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)} \qquad (0<a<b),$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}\,dx.$

Lösung 6

(a) Wir setzen $f(z) := \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z-ib)(z+ib)}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{2}\left(\mathrm{res}_{ia}f + \mathrm{res}_{ib}f\right)\\
&= \pi i\left(\frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)}\bigg|_{z=ia} + \frac{1}{(z+ib)(z^2+a^2)}\bigg|_{z=ib}\right)\\
&= \pi i\left(\frac{1}{2ia(-a^2+b^2)} + \frac{1}{2ib(-b^2+a^2)}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{b-a}{ab(b^2-a^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}
\end{aligned}$$

(b) Wir setzen $R(x) := \frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x-i)^2(x+i)^2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \cos(x)R(x)\,dx &= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{ix}R(x)\,dx\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(2\pi i\ \mathrm{res}_i R(z)e^{iz}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{2\pi i}{(2-1)!}\left(e^{iz}(z+i)^{-2}\right)'\Big|_{z=i}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(2\pi i\left(\frac{ie^{i^2}}{(2i)^2} - \frac{2e^{i^2}}{(2i)^3}\right)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-2\pi e^{-1}}{-4} - \frac{4\pi e^{-1}}{-8}\right)\\
&= \frac{\pi}{e}
\end{aligned}$$