Klausur Funktionentheorie

Sommersemester 08
Prof. Dr. Bernd Dreseler
B.Sc. Denis Anders
B.Sc. Tim Dally

Aufgabe 1:
Man bestimme den geometrischen Ort aller komplexen Zahlen, die von 1 doppelt so weit entfernt sind wie von 0.

Aufgabe 2:
Man bestimme den Flächeninhalt A, den die folgenden drei Kreislinien ($|z-i| = 1$, $|z+i| = 1$, $|z-\sqrt{3}| = 1$) zwischeneinander einschlieẽen.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die holomorphe Funktion $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, für die

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2y$$

und $f(0) = 1$ gilt.

Aufgabe 4:
Es sei $\gamma_r : \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) \to \mathbb{C}$ die Kurve $\gamma_r(t) = rte^{it}$, $r \in \mathbb{R}_+$.
a) Skizzieren Sie γ_r für $r = 1$.
b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ und $\int_{\gamma_r} 1\,\mathrm{d}z$.

Aufgabe 5:
Gegeben sei die Funktion $f(z) = \sin\left[Re(Im(z^2))\right] + i\cos\left[\ln(Re(z))\right] - Im(|z| \cdot Re(z^3))$, $z \in A := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0 \wedge Im(z) \neq 0\}$.
a) In welchen Punkten ist f $\mathbb{C}$-differenzierbar bzw. holomorph?
b) Bestimmen Sie $f(z)$ für alle $z_0 \in A$, in denen f $\mathbb{C}$-differenzierbar ist.

Aufgabe 6:
Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale:

$$\text{a)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{49 + x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{b)} \int_0^\infty \frac{\cos(3x)}{(9 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

.