Prof. Dr. Hans-Peter Scheffler Wintersemester 2009/2010

Klausur zur Vorlesung Stochastik I

Wählen Sie aus den folgenden fünf Aufgaben vier Aufgaben aus. Die maximal erreichbare Punktezahl finden Sie neben jeder Aufgabe. Tragen Sie die Nummern der gewählten Aufgaben in das folgende Kästchen ein:

Gewählte Aufgabe:				

Die Bearbeitung anderer Aufgaben(teile) wird nicht bewertet.

Für einen Leistungsnachweis sind mindestens $19\pm\epsilon$ Punkte notwendig.
Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein gesondertes Blatt welches Sie mit Ihrem Namen und der Matrikelnummer versehen. Achten Sie in der Klausur auf sorgfältige und exakte Formulierungen.
Bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben genügt es, entsprechende Formeln abzuleiten. Exakte numerische Berechnungen, etwa mit Hilfe eines Taschenrechners sind nicht erforderlich.
Hilfsmittel sind bis auf einen handgeschriebenen Formelzettel und einen nicht-programmierbaren Taschenrechner nicht zugelassen! Der Formelzettel muss mit abgegeben werden!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1:

(a) Einem Kasten, der 16 weiße und 16 schwarze Schachfiguren enthält, werden nacheinander 3 Figuren zufällig und ohne Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, hierbei 3 schwarze Figuren zu bekommen?

(b) In einem Aufzug, der noch 6 Stockwerke fährt, sind 4 Personen, die voneinander unabhängig aussteigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß
  (i) alle in verschiedenen Stockwerken
  (ii) zwei in einem und die anderen beiden jeweils verschiedenen Stockwerken
  (iii) alle 4 im gleichen Stockwerk
  (iv) mindestens 3 im gleichen Stockwerk

aussteigen?

$\boxed{\text{8 Punkte}}$

Aufgabe 2: Die Zufallsvariable U sei gleichverteilt in $(0,1)$ sowie $\alpha > 0$. Es sei $X = U^{-1/\alpha}$.

(a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X sowie die Dichte der Verteilung von X.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha > 0$ für die
  (i) der Erwartungswert von X existiert;
  (ii) die Varianz von X existiert;

und berechnen Sie Erwartungswert/Varianz im Falle der Existenz.

(c) Sei nun $U_1, U_2, ...$ eine Folge von unabhängigen auf $(0,1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen und $\alpha > 2$. Zeigen Sie, dass ein $\mu > 0$ existiert, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i^{-1/\alpha} \to \mu \text{ stochastisch für } n \to \infty.$$

$\boxed{\text{12 Punkte}}$

Aufgabe 3: In einem Friseur-Laden mit 9 Friseuren dauert ein Haarschnitt 10 Minuten. Herr Snyder betritt den Laden und sieht, daß alle 9 Friseure beschäftigt sind. Die Zeitpunkte $T_1, ..., T_9$ des Fertigwerdens der Friseure $1, ..., 9$ seien in $[0, 10]$ gleichverteilt und unabhängig. Es bezeichne T die Wartezeit von Herrn Snyder bis er bedient wird.

(a) (i) Geben Sie eine Formel für T an.
(ii) Zeigen Sie, daß die Verteilungsfunktion F_T von T die Gestalt

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1 - \frac{t}{10})^9 & 0 \leq t \leq 10 \\ 1 & t > 10 \end{cases}$$

hat.

(b) Berechnen Sie die Dichte der Verteilung von T .

(c) Berechnen Sie die mittlere Wartezeit von Herrn Snyder.

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Aufgabe 4: Die Kunden eines Bekleidungsladens haben erfahrungsgemäß die Kleidungsgrößen L, M und S mit den Anteilen $50\%, 30\%$ bzw. 20%. Die gewünschte Ware ist vorrätig mit den Wahrscheinlichkeiten 0.8 (für L), 0.6 (für M) bzw. 0.3 (für S).

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß für einen zufälligen Kunden die gewünschte Ware vorrätig ist.

(b) Der Wunsch eines bestimmten Kunden sei vorrätig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Kleidungsgröße L hat?

$\boxed{\text{8 Punkte}}$

Aufgabe 5: Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable mit Dichte f_ν. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer für ν in den folgenden Fällen:

(a) f_ν ist die Dichte der log-Normalverteilung mit Parametern μ und σ^2, d.h.

$$f_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} 1_{(0,\infty)}(x),$$

mit $\nu = \mu \in \mathbb{R}$, d.h. zu festgehaltenem $\sigma^2 > 0$ ist der ML-Schätzer für μ gesucht.

(b) $f_\nu(x) = \alpha x^{\alpha-1} 1_{(0,1)(x)}$ mit $\nu = \alpha \in (0, \infty)$.

$\boxed{\text{12 Punkte}}$
