

# Klausur zur Vorlesung Algorithmische Einführung in die Zahlentheorie

Universität Siegen, Fachbereich Mathematik  
WS 2001/02 — 31. Januar 2002 — 15.15 – 16.45 Uhr

---

1. Zeigen Sie, daß  $n^4(n^4 - 1)(n^2 - 9)$  für jede ganze Zahl  $n$  durch 240 teilbar ist. (2)

2. Sei  $p$  eine Primzahl und 3 die Ordnung von  $a$  modulo  $p$ . Zeigen Sie, daß  $1 + a + a^2 \equiv 0 \pmod{p}$ . Leiten Sie hieraus ab, daß  $1 + a$  modulo  $p$  die Ordnung 6 hat. (2)

3. Bestimmen Sie alle Lösungen  $x$  modulo 253 der Gleichung  $x^2 - 177 \equiv 0 \pmod{253}$ . Hinweis:  $253 = 11 \cdot 23$ . (4)

4. Für welche Primzahlen  $p$  ist 14 ein quadratischer Rest? (4)

5. Seien  $f$  und  $g$  arithmetische Funktionen. Es gelte

$$g(n) = \sum_{\substack{d|n \\ n/d=\square}} f(d).$$

Zeigen Sie, daß dann (4)

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(\sqrt{d}) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Hier ist in der ersten Summe über alle Teiler  $d$  von  $n$  zu summieren, für die  $n/d$  Quadrat einer ganzen Zahl ist, und  $\mu$  bezeichnet die gewöhnliche  $\mu$ -Funktion mit der Konvention  $\mu(\sqrt{d}) = 0$ , falls  $\sqrt{d}$  keine ganze Zahl ist.

Die Klausur gilt ab 8 der möglichen 16 Punkte als bestanden.