Einführung in die Stochastik (2. Klausur) SS94

Prof. Dr. Reiß

---

1. Seien X, Y unabhängige ZV mit V.f. F bzw. Dichte g. Für $a, b > 0$ berechne man die V.f. von $aX - bY$.

2. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige ZV mit $\mathcal{L}(X_i) = N_{(\mu_i, \sigma_i^2)}$ für $i = 1, \ldots, n$. Man zeige, daß
$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = N_{(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)}.$$

3. Sei $\mathcal{Q} = \{Q_\alpha \ : \ \alpha > 0\}$ die Familie der verallgemeinerten Pareto Typ II Verteilungen, d.h.
$$F_\alpha(t) = Q_\alpha(-\infty, t] = 1 - (-t)^\alpha, \quad -1 \leq t \leq 0.$$
Berechne einen ML–Schätzer zum Stichprobenumfang n.

4. Durch eine Umfrage soll eine Wahlprognose für die Partei A erstellt werden. Hierzu werden n Personen getrennt voneinander befragt. Jede Person entscheidet sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ für die Partei A, wobei p nicht bekannt ist. Wieviele Personen sind maximal zu befragen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 der relative Anteil der Wähler von Partei A in der Stichprobe um nicht mehr als 0.02 von p abweicht.

5. Sei $\mathcal{Q} = \left\{B_{(1,p)} \ : \ p \in [0,1]\right\}$. Für ein $p_0 \in (0,1)$ soll die Nullhypothese $p \leq p_0$ (d.h. $\Theta_0 = [0, p_0]$) gegen die Alternative $p > p_0$ (d.h. $\Theta_1 = (p_0, 1]$) mit Hilfe eines kritischen Bereichs der Form
$$C_{n,\alpha} = \{x \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k_{n,\alpha}\}$$
getestet werden. Mittels des Zentralen Grenzwertsatzes (Moivre–Laplace) bestimme man eine Folge $k_{n,\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, für die der Test das asymptotische Niveau $\alpha \in (0,1)$ einhält. Es genügt zu zeigen:
$$\lim_{n \to \infty} B_{(1,p_0)}^n (C_{n,\alpha}) = \alpha.$$