Einführung in die Stochastik (2. Klausur) SS 00

Prof. Dr. Reiß

---

1. Die Verteilungsfunktion der Pareto-Verteilung mit Gestaltsparameter $\alpha < 0$ ist

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - x^{-\alpha}, & x \geq 1. \end{cases}$$

   (a) Man berechne den ML-Schätzer für den Gestaltsparameter α. (3)

   (b) Für welche Werte $\alpha > 0$ ist der Mittelwert der Pareto-Verteilung endlich? (2)

Lösung:

(a) Berechnung der Dichte:

$$f_\alpha(x) = F'_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \alpha x^{-\alpha-1}, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Likelihood-Fkt.:} \quad \alpha &\mapsto \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) \\
\text{Log-Likelihood-Fkt.:} \quad \alpha &\mapsto \sum_{i=1}^{n} \log f_\alpha(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log(\alpha x_i^{-\alpha-1})
\end{aligned}$$

Bestimmung des Maximums:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\alpha} \sum_{i=1}^{n} \log(\alpha x_i^{-\alpha-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha x_i^{-\alpha-1}} (x_i^{-\alpha-1} - \alpha x_i^{-\alpha-1} \log x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha}(1 - \alpha \log x_i) \quad \overset{!}{=} 0 \\
&\Rightarrow \quad n - \alpha \sum_{i=1}^{n} \log x_i = 0 \\
&\Rightarrow \quad \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} \\
\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} \log(\alpha x_i^{-\alpha-1}) &= -\frac{1}{\alpha^2} < 0 \quad \Rightarrow \text{Maximum} \\
&\Rightarrow \quad \hat{\alpha}_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i} \quad \text{ist der Maximum-Likelihood-Schätzer}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} m(Q) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x), dx \\ &= \int_{1}^{\infty} x\alpha x^{-\alpha-1}, dx \\ &= \int_{1}^{\infty} \alpha x^{-\alpha}, dx \end{aligned}$$

sei zunächst $\alpha \neq 1$

$$\Rightarrow \quad m(Q) = \alpha \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^{\infty}$$

Dieser Mittelwert ist endlich für $\alpha > 1$, denn

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ \infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Für $\alpha > 1$ ist $m(Q) = \frac{\alpha}{-\alpha+1}$
Für $\alpha = 1$ ist

$$m(Q) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \log x|_1^{\infty},$$

also nicht endlich.

2. Seien X_1 und X_2 unabhängige, standard-exponentialverteilte Zufallsvariable. Man berechne die Verteilungsfunktion und die Dichte von X_1+X_2. (4)

Lösung:

$$P\{X \leq t\} = F_{X_1}(t) = F_{X_2}(t) = 1 - e^{-t} \quad \text{für } t \geq 0$$

$$f_{X_1}(t) = e^{-t} \quad \text{für } t \geq 0$$

X_1, X_2 unabhängig

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{X_1+X_2}(t) &= P\{X_1 + X_2 \leq t\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_1}(t-y) f_{X_2}(y)\, dy \end{aligned}$$

Es gilt:

$$F_{X_1}(t-y) = 0 \quad \text{für} \quad t - y < 0 \Leftrightarrow y > t$$

$$f_{X_2}(y) = 0 \quad \text{für} \quad y < 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{X_1+X_2}(t) &= \int_0^t (1 - e^{-t+y}) e^{-y}\, dy \\ &= \int_0^t (e^{-y} - e^{-t})\, dy \\ &= \left[-e^{-y} - ye^{t}\right]_0^t \\ &= -e^{-t} - te^{-t} + 1 \\ \Rightarrow f_{X_1+X_2}(t) &= te^{-t} \end{aligned}$$

3. Seien $x_{1:n} \leq ... \leq x_{n:n}$ die der Größe nach geordneten Komponenten des Vektors $x = (x_1, ..., x_n)$.

   (a) Für $x_{k:n}$ zeige man

$$x_{k:n} \leq t \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(x_i) \geq k. \tag{1}$$

   (b) Sei $g_{k:n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_{k:n}(x_1, ..., x_n) = x_{k:n}$. Die k-te Ordnungsstatistik zu unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ ist definiert durch $X_{k:n} = g_{k:n}(X_1, ..., X_n)$. Man zeige, dass

$$P\{X_{k:n} \leq t\} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (F(t))^i (1 - F(t))^{n-i}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

   falls F die V.f. von X_i ist für $i = 1, ..., n$. (3)

   (c) Falls F stetig differenzierbar ist mit $f = F'$, dann ist

$$f_{k:n}(x) = n! f(x) \frac{F^{k-1}(x)(1 - F(x))^{n-k}}{(k-1)!(n-k)!}$$

   eine Dichte von $X_{k:n}$. (2)

Lösung:

(a) Sei $x_{k:n} \leq t$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(x_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} 1_{(-\infty,t]}(x_{i:n})}_{=k} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(x_{i:n})}_{\geq 0} \geq k.$$

Sei $\sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(x_i) \geq k$

$$\Rightarrow \text{es gibt mind. } k \; x_i \text{ mit } x_i \leq t \Rightarrow x_{k:n} \leq t$$

(b)

$$\begin{aligned}
P\{X_{k:n} \leq t\} &= P\{\sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(X_j) \geq k\} \\
&= \sum_{i=k}^{n} P\{\sum_{j=1}^{n} 1_{(-\infty,t]}(X_j) = i\} \\
&= \sum_{i=k}^{n} B_{(n,F(t))}\{i\} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} (F(t))^i (1 - F(t))^{n-i}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
F_{k:n}(t) &= \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} F(t)^i (1-F(t))^{n-i} \\
f_{k:n}(t) &= \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot (iF(t)^{i-1} f(t)(1-F(t)^{n-i} + F(t)^i (n-i)(1-F(t))^{n-i-1}(-f(t)) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} kF(t)^{k-1} f(t)(1-F(t))^{n-k} \\
&+ \frac{n!}{k!(n-k)!} F(t)^k (n-k)(1-F(t))^{n-k-1}(-f(t)) \\
&+ \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}(k+1)F(t)^k f(t)(1-F(t)^{n-k-1} \\
&+ \cdots \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(t)^{k-1} f(t)(1-F(t))^{n-k} \\
&- \frac{n!}{k!(n-k-1)!} F(t)^k (1-F(t))^{n-k-1} f(t) \\
&+ \frac{n!}{k!(n-k-1)!} F(t)^k f(t)(1-F(t)^{n-k-1} \\
&+ \cdots \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(t)^{k-1} f(t)(1-F(t))^{n-k} \qquad \text{(Teleskopsumme!)}
\end{aligned}$$

4. Sei X eine standard-normalverteilte Zufallsvariable, d. h. X besitze die Dichte $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} exp(-x^2/2)$. Man berechne die Dichte von $-X$.(2)

Lösung:

$$\begin{aligned}
P\{-X \le t\} &= P\{X \ge -t\} \\
&= \int_{-t}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx \\
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} = \varphi(t)
\end{aligned}$$

d. h. X und $-X$ haben dieselbe Dichte.

5. Man bestimme die kleinste σ-Algebra auf $\mathbb{N}_0$, welche die Mengen $\{1,2,3,4\}$, $\{2,3\}$ und $\{5\}$ enthält. (3)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4\}+\{5\} &= \{1,2,3,4,5\} \\
\{1,2,3,4\}\setminus\{2,3\} &= \{1,4\} \\
\{2,3\}+\{5\} &= \{2,3,5\} \\
\{1,4\}+\{5\} &= \{1,4,5\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad & \sigma(\{1,2,3,4\},\{2,3\},\{5\}) \\
=\quad & \{\emptyset,\{5\},\{1,4\},\{2,3\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{1,2,3,4,5\}, \\
& \mathbb{N}_0\setminus\{5\},\mathbb{N}_0\setminus\{1,4\},\mathbb{N}_0\setminus\{2,3\},\mathbb{N}_0\setminus\{1,4,5\},\mathbb{N}_0\setminus\{2,3,5\},\mathbb{N}_0\setminus\{1,2,3,4,5\},\mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$