Aufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra II

PD Dr. Jörg Jahnel

Wiederholungsblatt **Sommersemester 2014**

1. Es seien $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad (a,b,c) \mapsto (2a-c, 3b, -a+2c)$$

ein Endomorphismus.

a) Zeigen Sie, daß f selbstadjungiert ist.

b) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von f besteht.

2. Es seien $x, y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})\,.$$

3. Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\,.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von B. Geben Sie eine Basis aus verallgemeinerten Eigenvektoren an.

4. Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ -49 & -4 & 0 \\ 476 & 68 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,.$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von C. Geben Sie eine Basis aus verallgemeinerten Eigenvektoren an.

5. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 12 \\ 12 & 41 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\,.$$

Führen Sie eine Hauptachsentransformation von A durch.

6. Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Führen Sie eine Hauptachsentransformation von A durch.

7. a) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3.

c) Welche der Untergruppen in a) und b) sind jeweils Normalteiler?

8. a) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

b) Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

9. In der Ebene E seien $\delta_1, \delta_2 \colon E \to E$ zwei Drehungen. Dabei seien $\delta_1 \neq \mathrm{id}$, $\delta_2 \neq \mathrm{id}$ und $\delta_1 \circ \delta_2 \neq \mathrm{id}$ vorausgesetzt. Ist es dann möglich, daß $\delta_1 \circ \delta_2$ eine

a) Verschiebung

b) Drehung

c) Spiegelung

d) Gleitspiegelung

ist?

10. Bringen Sie den Kegelschnitt mit der Gleichung

$$9x_1^2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 12x_2 - 144 = 0$$

in Normalform.

11. Bestimmen Sie alle Kegelschnitte, die durch die fünf Punkte $(2, -2)$, $(3, 1)$, $(3, -5)$, $(-7, 1)$ und $(-7, -5) \in \mathbb{R}^2$ verlaufen.

Abgabetermin: keiner