Lineare Algebra II — SS 1996

Dr. Overhagen

---

1. Sei $A = ((a_{ij}))$ eine reelle (n,n)-Dreiecks-Matrix (d. h. mit $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq j \leq n$), A^* die adjungierte Matrix und es gelte $A \cdot A^* = E$. Zeigen Sie, dass A eine Diagonalmatrix ist. (4)

   Lösung: $E = A \cdot A^* = A \cdot \bar{A}^\top = A \cdot A^\top$, da A reell.
   $\delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{\min\{i,k\}} a_{ij} a_{kj}$, da A Dreiecksmatrix.
   Beh.: $A = E$, d.h. $a_{kk} = 1, a_{ki} = 0, i \neq k$.
   Vollst. Induktion über k:

   $k = 1:\ \delta_{ik} = \delta_{i1} = \sum_{j=1}^{\min\{i,1\}} a_{ij} a_{1j} = a_{i1} a_{11}$
   $\quad i = 1: \quad 1 = \delta_{11} = a_{11}^2 \Rightarrow a_{11} = 1$

   $k \to k+1:\ \delta_{i,k+1} = \sum_{j=1}^{\min\{i,k+1\}} a_{ij} a_{k+1,j}$
   $\quad i < k+1: \quad 0 = a_{ii} a_{k+1,i} = a_{k+1,i}$ (wegen Ind.Vor.)
   $\quad i = k+1: \quad 1 = a_{k+1,k+1}^2 \Rightarrow a_{k+1,k+1} = 1$
   $\quad i > k+1: \quad a_{k+1,i} = 0$ n. Vor.

2. Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, sei

   $$f(x,y) := 4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2.$$

   Untersuchen Sie, welche Eigenschaften eines Skalarproduktes im $\mathbb{R}^2$ von f erfüllt werden! (4)

   Lösung:

   Funktion: $x, y \in \mathbb{R}^2: \quad f(x,y) = 4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2 \in \mathbb{R}$

   Linearität in der ersten Komponente: $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = 4(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\zeta_1)\eta_1 - 2(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\zeta_1)\eta_2 - 2(\alpha_1\xi_2 + \alpha_2\zeta_2)\eta_1 + \alpha(\alpha_1\xi_2 + \alpha_2\zeta_2)\eta_2 = \alpha_1(4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2) + \alpha_2(4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y)$

   Symmetrie: $f(x,y) = 4\xi_1\eta_1 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \alpha\xi_2\eta_2 = 4\eta_1\xi_1 - 2\eta_2\xi_1 - 2\eta_1\xi_2 + \alpha\eta_2\xi_2 = 4\eta_1\xi_1 - 2\eta_1\xi_2 - 2\eta_2\xi_1 + \alpha\eta_2\xi_2 = f(y,x)$

   positive Definitheit: $f(x,x) = 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - \alpha\xi_2^2 = (2\xi_1)^2 - 2 \cdot 2\xi_1 \cdot \xi_2 + \xi_2^2 + \alpha\xi_2^2 - \xi_2^2 = (2\xi_1 + \xi_2)^2 + \xi_2^2(\alpha - 1)$
   $\alpha > 1: \quad f(x,x) \geq 0,$
   $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow 2\xi_1 = \xi_2 \wedge \xi_2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$
   $\alpha = 1: \quad f(x,x) \geq 0,$
   $f(x,x) = 0$ auch für $2\xi_1 = \xi_2$ (positiv semidefinit)
   $\alpha < 1: \quad f(x,x) < 0$ z.B. für $\xi_1 = 0, \xi_2 = 1$
   $\Rightarrow f$ positiv definit nur für $\alpha > 1$

3. Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und zu jedem Eigenraum eine Orthonormalbasis von A.

(b) Gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht? (Konstruktion einer solchen Basis oder Beweis, dass keine solche Basis existiert!)

(5)

Lösung:

(a) **Char. Polynom:**

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \det(A - tE) = \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -3 & -2-t & -2 \\ 6 & 6 & 5-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)\begin{vmatrix} -2-t & -2 \\ 6 & 5-t \end{vmatrix} = (1-t)((-2-t)(5-t)+12) \\ &= (1-t)(t^2-3t+2) = -(t-1)^2(t-2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A sind 1 und 2.

Eigenräume: $\lambda_1 = 1$:

$$(A-E)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \xi_1 = -\xi_2 - \frac{2}{3}\xi_3$

$\Rightarrow$ Eigenraum $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =: E_1$

$\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned} (A-2E)x = 0 \quad &\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -2 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \xi_2 = -\frac{1}{2}\xi_3, \quad \xi_1 = 0$

$\Rightarrow$ Eigenraum $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha \in \mathbb{R} \right\} =: E_2$

Orthonormalbasen: E_1 : es ist $\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b_2' = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|b_2'| = \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{11}}{3} \Rightarrow b_2 := \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{b_1, b_2\}$ ist Orthonormalbasis von E_1

E_2 : Es ist $\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \Rightarrow b_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{b_3\}$ ist Orthonormalbasis von E_2

(b) Wegen $b_1 \cdot b_3 \neq 0$ steht (die Gerade) E_2 nicht senkrecht auf (der Ebene) E_1, eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren existiert also nicht.

4. Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum, $f : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, und es gelte $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Weiter sei $M := \{\langle f(x), x\rangle; x \in V, |x| = 1\}$. Zeigen Sie:

   (a) $M \subset \mathbb{R}$.

   (b) M hat das Minimum λ_n und das Maximum λ_1.

(5)

Lösung:

(a) f ist selbstadjungiert $\overset{\text{Satz 6.4.14}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, alle Eigenwerte sind reell, und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.
Sei B Orthonormalbasis in V, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow < f(x), x > &= < \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n, f(\xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n) > \\
&= < \xi_1 b_1 + \ldots + \xi_n b_n, \xi_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \xi_n \lambda_n b_n > \\
&= \underbrace{|\xi_1|^2}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{\bar{\lambda}_1}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{< b_1, b_1 >}_{=1} + \ldots + |\xi_n|^2 \bar{\lambda}_n < b_n, b_n > \in \mathcal{R} \\
\Rightarrow \quad & M \subset \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Mit a) ist

$$\begin{aligned}
< f(x), x > &\geq |\xi_1|^2\lambda_n + \ldots + |\xi_n|^2\lambda_n = \lambda_n(|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2) \\
&= \lambda_n|x| = \lambda_n \quad \forall x \text{ mit } |x| = 1 \\
< f(x), x > &\leq |\xi_1|^2\lambda_1 + \ldots + |\xi_n|^2\lambda_1 = \lambda_1(|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2) \\
&= \lambda_1|x| = \lambda_1 \quad \forall x \text{ mit } |x| = 1
\end{aligned}$$

Gleichheit gilt für $x = b_n$ bzw. $x = b_1$.

Zum Bestehen der Klausur sind mindestens ca. 8 Punkte erforderlich