Klausur zur Linearen Algebra II

Aufgabe 1: $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sei definiert durch

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -8 & 7 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne die Eigenwerte von A.

b) Für jeden Eigenwert α von A gebe man eine Basis von $Eig(A;\alpha)$ an.

c) Für jeden Eigenwert α von A gebe man eine Basis von $Hau(A;\alpha)$ an.

d) Man bestimme das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 2: Sei $A \in M(2 \times 2; \mathbb{R})$. Zeigen Sie: A hat genau dann zwei verschiedene reelle Eigenwerte, falls $2 \cdot Spur(A^2) > (Spur A)^2$ gilt.

Aufgabe 3: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

Man gebe eine Matrix $T \in O(3)$ an, für die $T^t A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4: Es sei $A = (\alpha_{rs})_{(r,s) \in \underline{n} \times \underline{n}}$ aus $M(n \times n, \mathbb{R})$. Ferner gelte:

(i) $0 \leq \alpha_{rs} \leq 1$ für alle $(r,s) \in \underline{n} \times \underline{n}$

und (ii) $\displaystyle\sum_{s=1}^{n} \alpha_{rs} = 1$ für alle $r \in \underline{n}$.

Man zeige:
Für jeden Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ von A gilt $|\alpha| \leq 1$.

Aufgabe 5: Es sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Man zeige: Die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ {}^tA & E_n \end{pmatrix} \in M\left((m+n) \times (m+n), \mathbb{R}\right)$$

ist genau dann positiv–definit, wenn die Matrix $E_m - A^t A$ positiv–definit ist.

Aufgabe 6: Man zeige:

a) Ist $B = (\beta_{kl})_{(k,l) \in \underline{n} \times \underline{n}} \in M(n \times n, K)$ eine Diagonalmatrix mit $\beta_{kk} \neq \beta_{ee}$ für $k \neq e$ und ist $A \in M(n \times n, K)$ eine Matrix mit $AB = BA$, dann ist auch A eine Diagonalmatrix.

b) $B \in M(n \times n, K)$ besitze n verschiedene Eigenwerte in K und $A \in M(n \times n, K)$ kommutiere mit B. Dann gibt es ein Polynom $f \in K[t]$ mit
$$A = f(B).$$