Probeklausur zur Linearen Algebra II SS 93

1. Sei $A \in O(n)$. Man zeige:

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n \;:\; Ax = x,\; Ay = -y \Longrightarrow < x, y >= 0.$$

2. Beweise oder widerlege:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ist diagonalisierbar.}$$

3. Zu

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gebe man ein $T \in O(3)$ an, so daß

$$T^\top A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Man bestimme die orthogonale Normalform N der Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und finde ein $T \in O(3)$, so daß $T^\top A T = N$.

5. Man schreibe die Quadrik

$$Q = \{(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \;;\; x_1 x_2 + 2x_3 = 0\}$$

in Matrixform und bestimme die orthogonale Normalform.

6. Man zeige: Zu je zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = \|y\|$ gibt es ein $T \in O(n)$, so daß $Tx = y$. ($O(n)$ operiert transitiv auf Sphären.)

7. Mit dem Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahren bestimme man eine ONB des Teilraumes

$$U = [(2,4,1,0),(1,5,3,2),(3,10,5,3),(0,1,1,1)]$$

von $\mathbb{R}^4$.

8. Es sei $g = \mathbb{R}x \bigoplus \mathbb{R}y$ die Gerade in Hyp mit $x = (1,2,0,0)$, $y = (2,1,0,0)$, ferner sei $P = \mathbb{R}z$ mit $z \in \mathbb{R}^4$, $\sigma(z,z) < 0$ ein Punkt von Hyp mit $p \notin g$. Man bestimme:

   (a) die unendlich fernen Punkte $\mathbb{R}u, \mathbb{R}v \in Hyp_\infty$ von g,

   (b) die beiden Grenzparallelen zu g durch P.