Nachklausur zur linearen Algebra II SS 94

1. Man zeige die Identität

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 1 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{22}+l_2+k_2 & a_{23}+l_2+k_3 & a_{24}+l_2+k_4 \\ 1 & a_{32}+l_3+k_2 & a_{33}+l_3+k_3 & a_{34}+l_3+k_4 \\ 1 & a_{42}+l_4+k_2 & a_{43}+l_4+k_3 & a_{44}+l_4+k_4 \end{vmatrix}$$

   für alle $a_{ij} \in \mathbb{R}, k_i \in \mathbb{R}, l_i \in \mathbb{R}, i,j = 2,3,4$.

2. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis $a_1, \dots, a_n$. Weiter sei F ein Skalarprodukt über V mit Matrix G bezüglich $a_1, \dots, a_n$. Man zeige: F ist positiv definit genau dann, wenn $G = W^\top W$ für eine reguläre Matrix W gilt (Man verwende z.B. Satz 5.5).

3. Gegeben sei auf dem $\mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt g mit der Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   bezüglich der Standardbasis. Man bestimme eine ON–Basis von g.

4. Die Abbildung $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $F(x,y) = x^\top G y$ für die Spaltenvektoren x, y mit einer $(n \times n)$–Matrix G. Man zeige: F ist genau dann ein Skalarprodukt, wenn G symmetrisch ist.

5. Sei V ein n–dimensionaler VR, $L : V \to V$ ein Endomorphismus mit $L \circ L = L$ und sei $Rang L = r$. Man zeige, daß das charakteristische Polynom $Ch(\lambda)$ von L die Form

$$Ch(\lambda) = (1-\lambda)^r \lambda^{n-r}$$

   hat.