Klausur zur linearen Algebra II   SS 94

1. Man berechne
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Seien V ein VR über einem Körper $K(char K \neq 2)$ mit $\dim V = n$ und $L\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist für jede Determinantenform D
$$H(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} D(v_1, \ldots, v_{i-1}, Lv_i, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, Lv_j, v_{j+1}, \ldots, v_n)$$
eine n–Linearform auf V (braucht nicht gezeigt zu werden!).
Man zeige: Es gibt genau ein nur von L abhängiges $g(L) \in K$ mit $H(v_1, \ldots, v_n) = g(L) D(v_1, \ldots, v_n)$.

3. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit endlicher Dimension und einem Skalarprodukt F. F habe die Matrix G bezüglich einer Basis von V. Man zeige oder widerlege:
$$\det G > 0 \Leftrightarrow F \text{ positiv definit.}$$

4. In einem euklidischen VR der Dimension n sei ein ON–System $a_1, \ldots,$ a_{n-1} gegeben. Man zeige, daß es genau zwei Vektoren $a_n^{(1)}, a_n^{(2)}$ gibt, so daß $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n^{(i)}$ eine Orthonormalbasis bildet.

5. Gegeben sei ein Skalarprodukt g auf dem $\mathbb{R}^3$ mit Matrix
$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$$
bezüglich der Standardbasis. Man zeige, daß g positiv definit ist und bestimme eine ON–Basis.