Lineare Algebra I — WS 98/99

Prof. Dr. W. Schempp

---

1. • Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

• und bestimmen Sie (3 x 1)-Matrizen u, v und (1 x 4)-Matrizen x, y mit $A = ux + vy$

(4)

Lösung:

• Aus

	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	1	1	1	−2
a_2	2	1	3	6
a_3	1	2	0	−12

erhält man durch Austausch [1] von a_1 mit e_1 und a_2 mit e_3:

	a_1	e_2	a_2	e_4
e_1	3	−2	−1	12
e_3	−2	1	1	−10
$(*)\ a_3$	3	**0**	−1	**0**

Die letzte Zeile zeigt, daß a_3 linear abhängig zu a_1 und a_2 ist. Daher: $\mathbf{Rang(A)} = 2$

• $(*) \Rightarrow a_3 = 3a_1 - a_2$ also lassen sich alle a_i aus a_1 und a_2 darstellen:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1a_1 + 0a_2 \\ a_2 &= 0a_1 + 1a_2 \\ a_3 &= 3a_1 - 1a_2 \end{aligned}$$

Setze nun $x := a_1, \quad y := a_2,$

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich: $\quad A = ux + vy$

2. Bestimmen Sie (2 x 2)-Matrizen A, B, C mit

$$Spur(ABC) \neq Spur(BAC)$$

[1] zur *Austauchmethode* siehe auch : Bronstein, u.a.: Taschenbuch der Mathematik

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst *(möglichst einfache Matrizen)* A, B mit $AB \neq BA$. (4)

Lösung:

$$\text{Setze} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad ABC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } BAC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Also $Spur(ABC) = 1 \neq Spur(BAC) = 3$.

3. Sei V der Vektorraum der (2 x 2)-Matrizen mit reellen Einträgen und

$$T : V \to V, \quad T(A) = A + A^t$$

   (a) Zeigen Sie, daß V eine lineare Abbildung ist.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $Bild(T)$ und eine Basis von $Kern(T)$

   Hinweis eine Basis von V lautet:

$$B_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad B_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad B_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \qquad B_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

(4)

Lösung: Verwende die bekannten Rechengesetze für das Transponieren!

(a) i. sei $A, B \in V$ zu zeigen: $T(A+B) = T(A) + T(B)$

$$\begin{aligned} T(A+B) &= A + B + (A+B)^t = A + B + A^t + B^t \\ &= \underbrace{A + A^t}_{T(A)} + \underbrace{B + B^t}_{T(B)} \end{aligned}$$

ii. sei $A \in V$ *und* $r \in \mathbf{R}$ zu zeigen: $T(rA) = rT(A)$

$$\begin{aligned} T(rA) &= rA + (rA)^t = rA + rA^t = r(A + A^t) \\ &= rT(A) \end{aligned}$$

(b) Berechne:

$$\begin{aligned} T(B_1) &= & B_1 + B_1 = & & 2B_1 \\ T(B_2) &= & & & B_2 + B_3 \\ T(B_3) &= & & & B_2 + B_3 \\ T(B_4) &= & B_4 + B_4 = & & 2B_4 \end{aligned}$$

	B_1	B_2	B_3	B_4
$T(B_1)$	2	0	0	0
$T(B_2)$	0	1	1	0
$T(B_3)$	0	1	1	0
$T(B_4)$	0	0	0	2

...

	$T(B_1)$	$T(B_2)$	B_3	$T(B_4)$
B_1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
B_2	0	1	-1	0
$T(B_3)$	0	1	0	0
B_4	0	0	0	$\frac{1}{2}$

Man erkennt, daß $Bild(T)$ nur aus drei linear unabhängigen Vektoren besteht. Damit gilt :

$$Bild(T) = \overline{[T(B_1), T(B_2), T(B_4)]} = \overline{[2B_1, B_2 + B_3, 2B_4]}$$

Aus der dritten Zeile folgt: $0 = T(B_2) - T(B_3) = T(B_2 - B_3)$

$$\Rightarrow Kern(T) = \overline{\{B_2 - B_3\}}$$

4. Seien $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{P}^2$ definiert durch:

$$p_1(x) = (x-1), \quad p_2(x) = (x+1), \qquad q_1(x) = (x-2), \quad q_2(x) = (x+2)$$

Sei U der von q_1 und q_2 und V der von p_1 und p_2 erzeugte Unterraum von $\mathbb{P}^2$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $U + V$

(b) Bestimmen sie eine Basis von $U \cap V$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{P}$

(4)

Lösung: Mit $p_1 = x-2x+1$, $p_2 = x+2x+1$, $q_1 = x-4x+4$, $q_2 = x+4x+4$ und $e_1 = x$, $e_2 = x$, $e_3 = x = 1$ wende man die Autauschmethode an:

	e_1	e_2	e_3
p_1	1	-2	1
p_2	1	2	1
q_1	1	-4	4
q_2	1	4	4

$\ldots$

	p_1	p_2	q_1
e_1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
e_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
e_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
q_2	-2	2	1

(a) Aus der letzten Zeile sieht man, daß p_1, p_2 und q_1 linear unabhängig sind und sich q_2 aus ihnen darstellen läßt. Wegen $U+V = \overline{[p_1, p_2, q_1, q_2]} = \overline{[p_1, p_2, q_1]}$ bilden p_1, p_2 und q_1 eine Basis von $U + V$.

(b) Ebenfalls aus der letzten Zeile folgt

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= -2p_1 + 2p_2 \\ &= x - x - 4x - 4x + 4 - 4 = -8x \end{aligned}$$

$\Rightarrow U \cap V = \overline{[x]} = \overline{\left[\frac{1}{8}(q_1 - q_2)\right]}$. Zu einer Basis des $\mathbb{P}$ wird $\overline{[x]}$ ergänzt durch $\overline{[x, 1]}$.

5. Sie V der Vektorraum der (2 x 2)-Matrizen mit reellen Einträgen und

$$T : V \to \mathbb{R}^2, \qquad T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11} + a_{22},\ a_{12} - a_{21})$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von T bezüglich der Basen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad u_1 = (0, 3), u_2 = (2, 0)$$

(4)

Lösung:

- Berechne die Bilder der Basis:

$$\begin{array}{rcl} T(M_1) & = & (1,\ 0) \\ T(M_2) & = & (0,\ 1) \\ T(M_3) & = & (0,-1) \\ T(M_4) & = & (1,\ 0) \end{array}$$

Die Bilder der Basis als Spalten in die Matrix A eintragen:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

u_i aus e_i darstellen:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0e_1 + 3e_2 \\ u_2 & = & 2e_1 + 0e_3 \end{array}$$

Die Matrix B vollzieht den Basiswechsel von u_i nach e_i

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Durch Invertieren von B erhält man B^{-1}, welche den Basiswechsel von e_i nach u_i vollzieht:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die gesuchte Matrix ist $C := B^{-1}A$, welche die Darstellung von T bezüglich u_1 und u_2 beschreibt:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Hinweis: $T(X)$ geht über in Cx mit $x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ x ist der Koordinatenvektor der Matrix X bezüglich der "Basismatrizen" M_i.

6. Sei $W = \{(1,2,0),(0,1,1)\} \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Basis von

$$A(W) = \{f \in (\mathbb{R})^* \,|f(w) = 0 \qquad \text{für alle } w \in W\}$$

(4)

Lösung: Sei e_1^*, e_2^*, e_3^* eine Basis von $(\mathbb{R})^*$. Dann läßt sich jedes $f \in (\mathbb{R})^*$ als Linearkombination von e_1^*, e_2^*, e_3^* darstellen mit $f = ae_1^* + be_2^* + ce_3^*$ Berechne $f(W)$ indem man f auf die Basis von W anwendet, durch Zusammenfassen der Ergebnisse für die beiden Vektoren, erhält man A.

$$\begin{array}{rcl} f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) & = & 0 \qquad \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b \\ f(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) & = & 0 \qquad \Rightarrow 2b + c = 0 \Rightarrow c = -2b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow f & = & -be_1^* + be_2^* + -2be_3^* \\ & = & b(-e_1^* + e_2^* - e_3^*) \end{array}$$

Setze $b := 1 \Rightarrow -e_1^* + e_2^* - e_3^*$ ist eine Basis von $A(W)$

7. Bestimmen Sie A^{-1} für

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(4)

Lösung: Invertieren z.B. mit der Austauschmethode liefert:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$