Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Aufgabe 1: $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sei eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $KernT$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$.

b) $BildT$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2: $D := \{A \in Mat(N, \mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, und $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{NN} \neq 0\}$. Zeigen Sie: D ist mit der Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe.

Aufgabe 3: Sei $A \in Mat(n, m, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ des Gleichungssystems $Ax = b$ sei nicht leer. Zeigen Sie, daß $\mathbb{L}$ einen zum Vektorraum $Kern(A)$ affinen Raum bildet.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie e^A für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5: Invertieren Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6: Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -6 & 8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Zeilenreduktionsverfahrens.

Aufgabe 7: Zeigen Sie, daß $W := \{p \in \mathbb{P}_4 \mid p(5) = 0\}$ ein Untervektorraum des Vektorraumes $\mathbb{P}_4$ der Polynome höchstens 4. Grades ist. Geben Sie eine Basis von W an. (Mit Beweis!)