Lineare Algebra I WS 95/96

Dr. Overhagen

---

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\xi_1 & + & 2\xi_2 & + & \xi_3 & + & \xi_4 & = & 0 \\
5\xi_1 & + & 9\xi_2 & + & 2\xi_3 & & & = & 1 \\
3\xi_1 & + & 2\xi_2 & & & - & 2\xi_4 & = & 0 \\
-\xi_1 & + & 3\xi_2 & + & 8\xi_3 & + & a\xi_4 & = & b
\end{array}$$

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist es lösbar? Bestimmen Sie alle Lösungen.
(5)

Lösung: Anwendung des Gaußverfahrens auf das GLS:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 8 & a & b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & a+1 & b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & a-24 & b+5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a-14 & b+\frac{7}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \quad (a-14)\xi_4 = b + \tfrac{7}{3} \overset{a\neq 14}{\to} \xi_4 = \frac{b+\frac{7}{3}}{a-14}$$

$$\to \quad \xi_3 = \tfrac{1}{9}\left(-4 - 15\frac{b+\frac{7}{3}}{a-14}\right) = \tfrac{1}{9}\left(\frac{-4a+56-15b-35}{a-14}\right) = \tfrac{1}{9}\left(\frac{-4a+21-15b}{a-14}\right)$$

$$\to \quad \xi_2 = -1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{-4a+21-15b}{a-14}\right) - 5\left(\frac{b+\frac{7}{3}}{a-14}\right) = \frac{14-a+\frac{4}{3}a-7+5b-5b-\frac{35}{3}}{a-14}$$

$$= \frac{-\frac{14}{3}+\frac{1}{3}a}{a-14} = \frac{1}{3}\,\frac{-14+a}{a-14} = \frac{1}{3}$$

$$\to \quad \xi_1 = -\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{9}\left(\frac{-4a+21-15b}{a-14}\right) - \frac{b+\frac{7}{3}}{a-14} = \frac{-\frac{2}{3}a+\frac{28}{3}+\frac{4}{9}a-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}b-b-\frac{7}{3}}{a-14}$$

$$= \frac{-\frac{2}{9}a+\frac{14}{3}+\frac{2}{3}b}{a-14} = \frac{2}{3}\,\frac{-\frac{a}{3}+7+b}{a-14}$$

Das Gleichungssystem ist für $a \neq 14$ eindeutig lösbar mit obiger Lösung.

Für $a = 14$ und $b = -\frac{7}{3}$ gibt es unendlich viele Lösungen, es ist dann

$$\begin{aligned}
\xi_4 &=: c \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \\
\xi_3 &= \frac{-4-15c}{9} \\
\xi_2 &= -1 - 3\frac{-4-15c}{9} - 5c = \frac{-9+12+15c-45c}{9} = \frac{3-30c}{9} = \frac{1-10c}{3} \\
\xi_1 &= -2\frac{1-10c}{3} - \frac{-4-15c}{9} - c = \frac{-6+60c+4+15c-9c}{9} = \frac{-2+66c}{9}
\end{aligned}$$

Für $a = 14, b \neq -\frac{7}{3}$ existiert keine Lösung.

2. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, $f : V \to V$ linear und es gelte $f \circ f \equiv \mathbf{0}$. Zeigen Sie

$$\operatorname{rg} f \leq \frac{n}{2}.$$

(3)

Lösung: $f \circ f \equiv \mathbf{0} \Longrightarrow \dim \operatorname{Kern}(f \circ f) = n$
Sei $y = f(x)$
$(f \circ f)(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \vee f(y) = 0$
$\Longrightarrow \dim \operatorname{Kern}(f \circ f) \leq \dim \operatorname{Kern} f + \dim \operatorname{Kern} f$
$\Longrightarrow n \leq 2 \dim \operatorname{Kern} f$
$\Longrightarrow \dim \operatorname{Kern} f \geq \frac{n}{2}$
$\Longrightarrow \operatorname{rg} f \leq \frac{n}{2}$

3. Seien V, V' Vektorräume, $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume mit $V = U_1 \oplus U_2$, $f : V \to V'$ ein linearer Ismorphismus. Zeigen Sie

$$V' = f(U_1) \oplus f(U_2).$$

Kann man die Aussage auf die direkte Summe endlich vieler Unterräume von V verallgemeinern? (Begründung!) (4)

Lösung:

(a) z.z.: $f(U_1) \oplus f(U_2)$ direkte Summe
Seien $y_1 \in f(U_1), y_2 \in f(U_2)$ bel.
$\Longrightarrow \exists x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ mit $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$
$y_1 + y_2 = 0 \Longrightarrow f(x_1) + f(x_2) = 0 \overset{f \text{ linear}}{\Longrightarrow} f(x_1 + x_2) = 0$
f injektiv$\Longrightarrow \operatorname{Kern} f = \{0\} \Longrightarrow x_1 + x_2 = 0$
$U_1 \oplus U_2$ direkte Summe$\Longrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow f(x_i) = y_i = 0, 1 \leq i \leq 2$
$\Longrightarrow f(U_1) \oplus f(U_2)$ direkte Summe.

(b) z.z.: $V' = f(U_1) \oplus f(U_2)$
Wegen $f : V \to V'$ gilt $f(U_1) \oplus f(U_2) \subset V'$
Sei $y \in V'$.
f surjektiv$\Longrightarrow \exists x \in V : f(x) = y$
$V = U_1 \oplus U_2 \Longrightarrow \exists x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 : x_1 + x_2 = x$ und es gilt $y = f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in f(U_1) \oplus f(U_2)$
$\Longrightarrow V' \subset f(U_1) \oplus f(U_2)$

$\Longrightarrow V' = f(U_1) \oplus f(U_2)$
Sämtliche Schritte gelten auch für die direkte Summe endlich vieler Unterräume.

4. Seien V, W endlich-dimensionale reelle Vektorräume, V^*, W^* die zugehörigen Dualräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, $f^* : W^* \to V^*$ die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie:

   (a) Ist f injektiv, dann ist f^* surjektiv.

   (b) Ist f surjektiv, dann ist f^* injektiv.

(4)

Lösung: Es gilt $\dim V = \dim V^* =: n$, $\dim W = \dim W^* =: m$ (Satz 3.4.4).

(a) f injektiv $\Longrightarrow \dim \mathrm{Kern} f = 0 \Longrightarrow \dim(\mathrm{Kern} f)^\perp = n = \dim \mathrm{Im}(f^*)$ (Satz 3.4.12 und 3.4.18) $\Longrightarrow \mathrm{Im}(f^*) = V^* \Longrightarrow f^*$ surjektiv

(b) f surjektiv $\Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f = m \Longrightarrow \dim(\mathrm{Kern} f)^\perp = m = \dim \mathrm{Im}(f^*) \Longrightarrow$ f^* injektiv

Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 7 Punkte erforderlich