Nachklausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: $F: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei gegeben durch

$$F\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + 4X_2 + 3X_3 \\ -X_1 + 2X_2 + X_3 \\ 5X_1 + 2X_2 + 3X_3 \end{pmatrix}$$

Man bestimme

a) eine Basis von $KerF$

b) eine Basis von ImF und

c) $\dim(KerF \cap ImF)$.

Aufgabe 2: Es seien

$$U := \{(\alpha, \beta, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

und

$$W := \{(\gamma, \delta, 2\gamma) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) Man zeige, daß U und W Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Man bestimme eine Basis von U und eine Basis von $U \cap W$.

Aufgabe 3: Für die Matrix

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{R})$$

berechne man die Matrix $\tilde{A}^{-1}$.

Aufgabe 4:

a) Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

aus $M(5 \times 5, \mathbb{R})$.

b) Die Matrix $\tilde{A} = (\alpha_{ij})_{(i,j)\in \underline{n}\times\underline{n}} \in M(n \times n, \mathbb{R})$ sei gegeben durch $\alpha_{ij} := \delta_{i,n+1-j}$. Man berechne $\det \tilde{A}$.

<u>Aufgabe 5:</u> $F: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei gegeben durch

$$F\left(\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 \end{pmatrix}.$$

Es sei

$$A := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

Man zeige, daß A eine Basis von $\mathbb{R}_3$ ist (vgl. Aufg. 3) und berechne die Matrix $M_A^A(F)$, durch die F bezüglich A dargestellt wird.

<u>Aufgabe 6:</u>

a) Man gebe ein Beispiel für einen Endomorphismus $F: \mathbb{R}_2 \to \mathbb{R}_2$ an mit $KerF = ImF$.

b) Man zeige: Es gibt keinen Endomorphismus $F: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ mit $KerF = ImF$.