Klausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: In $\mathbb{R}^4$ seien die folgenden Untervektorräume gegeben:

$$U := Span\{(1,0,3,4),(1,1,1,2),(-1,-4,5,4)\}$$
$$V := Span\{(2,1,3,1),(3,2,4,3)\}.$$

a) Man bestimme eine Basis von U.

b) Man ergänze die in a) erhaltene Basis von U zu einer Basis von $U+V$.

c) Man bestimme $\dim(U \cap V)$.

Aufgabe 2: V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume, F_1 und F_2 seien lineare Abbildungen von V nach W.

a) Man zeige:

$$\dim Im(F_1+F_2) \leq \dim ImF_1 + \dim ImF_2$$

b) Man leite aus der in a) zu zeigenden Ungleichung (oder direkt) eine Ungleichung her, die zwischen $\dim V, \dim KerF_1, \dim KerF_2$ und $\dim Ker(F_1+F_2)$ besteht.

c) Man gebe ein Beispiel für die Situation in a), in dem

$$\dim Im(F_1+F_2) = \dim ImF_1 + \dim ImF_2$$

gilt.

Aufgabe 3: Für die Matrix

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{R})$$

berechne man die Matrizen

$$\tilde{A}^{-1} \text{ und } (\tilde{A}^t)^{-1}.$$

Aufgabe 4: Man bestimme den Rest r $(0 \leq r < 7)$, den man bei Division der ganzen Zahl

$$\det \begin{pmatrix} 8 & 14 & 15 & 27 \\ 3 & 6 & 13 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 34 \\ -14 & 0 & 35 & 4 \end{pmatrix}$$

durch 7 erhält.

Aufgabe 5: $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei gegeben durch

$$F\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 2\xi_2 \\ 3\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß

$$\mathcal{A} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}_3$ ist, und berechne die Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$, durch die F bezüglich $\mathcal{A}$ dargestellt wird.

Aufgabe 6: V sei ein K–Vektorraum der Dimension n, W sei ein Untervektorraum von V und $W^0 := \{f \in Hom(V, K) \mid \forall\, w \in W(f(w) = 0)\}$. Man zeige: W^0 ist ein Untervektorraum von $Hom(V, K)$ und es gilt

$$\dim W + \dim W^0 = n.$$