# Klausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Man zeige, daß die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$ keine Untervektorräume sind:

$$U_1 := \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \le 1\},$$
$$U_2 := \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{Q}\},$$
$$U_3 := \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = -1\}$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechnen Sie $A^{-1}$.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4 &= 2 \\ 3\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4 &= 2 \\ 2\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_4 &= 2 \\ 4\xi_2 - 2\xi_2 + \xi_3 - 3\xi_4 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Es seien die Vektorräume

$$U_1 := Span\{(1,0,0,1),(1,2,0,-1),(1,-1,1,0),(2,5,-1,-1)\} \subset \mathbb{R}^4$$

und

$$U_2 := \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \xi_1-\xi_2-\xi_4 = \xi_2-\xi_3-\xi_4 = 0\}$$

gegeben. Man berechne die Dimensionen von $U_1, U_2, U_1+U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe 5: Es seien $e_1, e_2, e_3$ die Einheitsvektoren des $\mathbb{R}_3$, und die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei durch

$$F(e_1) = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad F(e_2) = \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 26 \end{pmatrix}, \text{ und } F(e_3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 17 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Für die aus $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ bestehende Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}_3$ berechne man $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$.

Aufgabe 6: Der $K$–Vektorraum $V$ enthalte $n$ Untervektorräume $U_i \neq \{\overrightarrow{0}\}$, so daß für alle $i \in \underline{n}$

$$U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j (:= U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n)) = \{\overrightarrow{0}\}$$

gilt. Man zeige, daß $\dim V \geq n$ ist.

Aufgabe 7: $K$ sei ein Körper, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, und für $F \in End(K_n)$ gelte $F \circ F = 0$. Zeigen Sie, daß $\dim F(K_n) \geq \frac{n}{2}$ ist.