Klausur zur Linearen Algebra I

1. Sei K ein Körper und seien $\alpha, \beta, \gamma \in K, \beta \neq 0$.
   Bestimmen Sie eine Basis von
   $$U := Span\{(\alpha, 0, \beta), (0, \alpha, \gamma), (\gamma, -\beta, 0)\} < K^3.$$

2. Im $\mathbb{R}^4$ seien die Untervektorräume
   $$U_1 := Span\{(1,0,0,1), (1,2,0,-1), (1,-1,1,0), (2,5,-1,-1)\}$$
   und
   $$U_2 := \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \xi_1 - \xi_2 - \xi_4 = \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0\}$$
   gegeben.
   Berechnen Sie die Dimension von $U_1, U_2, U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$. Ist die Summe $U_1 + U_2$ direkt? (Mit Begründung!)

3. Sei
   $$A := \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4.$$

   (a) Bestimmen Sie eine Basis von $L(A) := \{x \in \mathbb{R}_4 \mid Ax = 0\}$.

   (b) Bestimmen Sie $L(A, b) := \{x \in \mathbb{R}_4 \mid Ax = b\}$.

4. Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei durch
   $$F \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 2\xi_2 \\ 3\xi_3 \end{pmatrix}$$
   gegeben. Des weiteren sei ε die kanonische Basis von $\mathbb{R}_3$.
   Zeigen Sie, daß
   $$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$
   eine Basis von $\mathbb{R}_3$ ist, berechnen Sie $Mat(F; \varepsilon, \varepsilon)$ und mit Hilfe der Transfomrationsformel (!) $Mat(F; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

5. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $P: V \to V$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $P \circ P = P$. Beweisen Sie:

   (a) $V = Bild(P) \bigoplus Kern(P)$.

   (b) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so daß

$$Mat(P; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

   ist.

6. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ über einem Körper K und W ein Untervektorraum von V. Ferner sei $W^0 := \{f \in Hom(V, K) \mid f(w) = 0 \ \forall \ w \in W\}$. Zeigen Sie: W^0 ist ein Untervektorraum von $Hom(V, K)$ und es gilt $\dim(W) + \dim(W^0) = n$.