# Klausur zur Linearen Algebra I

1. Sei $\varepsilon := \{e_1, e_2, e_3\}$ die kanonische Basis, $\mathcal{B}$ die aus

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bestehende Basis von $\mathbb{R}_3$, und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei durch

$$f(e_1) := \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) := \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) := \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 17 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man bestimme

(a) $Mat(f; \varepsilon, \varepsilon)$,

(b) $Mat(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

2. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in Mat(4, \mathbb{R}), \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4.$$

(a) Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens bestimme man eine Basis von $\mathcal{L}(A, 0)$.

(b) Man bestimme ein $x_0 \in \mathbb{R}_4$, so daß $\mathcal{L}(A, b) = x_0 + \mathcal{L}(A, 0)$ gilt.

3. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat(3, \mathbb{R}).$$

Man zeige unter Verwendung elementarer Zeilenumformungen, daß $A$ invertierbar ist und berechne $A^{-1}$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$H := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

(a) Man zeige, daß $H$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

(b) Man bestimme eine Basis und die Dimension von $H$.

(c) Man gebe einen Vektor $z \in \mathbb{R}^n$ an, so daß $\mathbb{R}^n = H \bigoplus [z]$ ist. (Mit Beweis!)

5. Für die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U &:= \{(v, w, x, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ v + w = 0 = x + y\}, \\ V &:= \{(v, w, x, y) \in \mathbb{R}^4 \ : \ w + x = 0 = v + y\} \end{aligned}$$

von $\mathbb{R}^4$ beweise oder widerlege man:

(a) Die Summe $U + W$ ist direkt.

(b) $U + W = \mathbb{R}^4$.