Übungsklausur zur Linearen Algebra I

Aufgabe 1: Beweisen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 4 abelsch ist.

Aufgabe 2: Es sei G eine Gruppe. Für jedes $a \in G$ definieren wir eine Abbildung L_a durch $L_a : G \to G, L_A(b) := ab$. Zeigen Sie:

a) Für jedes $a \in G$ ist L_a bijektiv;

b) Die durch $f : G \to Abb(G,G), f(a) := L_a$ definierte Abbildung ist injektiv; wenn G mehr als ein Element besitzt, ist sie nicht surjektiv.

Aufgabe 3: Wie üblich sei

$$g_{a,b,c} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ ax + by + c = 0\} \text{ für } a,b,c \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0).$$

Bestimmen Sie ganze Zahlen a, b, c, so daß

$$g_{a,b,c} \supset \{(1,1) + t(1,2) \ ; \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Aufgabe 4: Es sei V ein (beliebiger) Vektorraum über dem Körper K und $a, b \in V$. Beweisen Sie, daß die Vektoren $c_1 := a,\ c_2 := a + b,\ c_3 := a - b$ linear abhängig sind.

Aufgabe 5: Es sei U der von den Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 3, & 1, & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Teilraum von $\mathbb{R}^3$.
Geben Sie

a) eine Basis von U an und einen Teilraum W von $\mathbb{R}^3$, so daß $\mathbb{R}^3 = U \bigoplus W$,

b) einen Teilraum W' von $\mathbb{R}^3$, so daß $\mathbb{R}^3 = U + W'$, die Summe aber nicht direkt ist.

Aufgabe 6: Es sei $f : \mathbb{R}_5 \to \mathbb{R}_5$ eine lineare Abbildung mit $\chi_f = (3-T)^4(2+T)$ und $Rg(3Id - f) = 3$.

a) Geben Sie alle Matrizen an, die als Jordan'sche Normalformen von f in Frage kommen.

b) Welche von diesen Matrizen sind ähnlich, welche nicht? (Beweis!)