Klausur zur Linearen Algebra I

1. (a) Es sei V ein (beliebiger) Vektorraum über dem Körper K und $a, b \in V$. Beweisen Sie, daß die Vektoren $c_1 := a,\ c_2 := a+b,\ c_3 := a-b$ linear abhängig sind.

   (b) Für $V = K^3, a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit $\alpha_i \neq 0$ und $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ bestimme man mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen eine Basis von $< a, b >$.

2. Es sei $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ definiert durch $f \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha - \gamma \\ \beta \\ 3\alpha - 2\gamma \end{pmatrix}$; ferner sei

$$U := \{a \in \mathbb{R}_3 \ ; \ f(a) = a\}$$
$$V := \{a \in \mathbb{R}_3 \ ; \ f(a) = -a\}.$$

   Zeigen Sie

   (a) f ist eine lineare Abbildung,

   (b) U und V sind Teilräume von $\mathbb{R}_3$,

   (c) $\mathbb{R}_3 = U \bigoplus V$.

3. Man zeige, daß die folgende Matrix invertierbar ist und bestimme mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen die inverve Matrix von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) Man bestimme die Menge aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$(A - \alpha E)x = 0 \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   eine nichttriviale Lösung besitzt.

   (b) Gibt es eine Basis B, so daß $Mat(\tilde{A}; B) = E$?

   (c) Für die Standardbasis E und die Basis $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$ berechne man $Mat(\tilde{A}; B, E)$ auf zwei Arten (direkt und mit dem Satz über Basiswechsel).

5. (a) Man bringe durch elementare Zeilenumformungen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

auf Zeilennomralform und gebe den Rang von A an.

(b) Geben Sie die Lösungsräume der Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $Ax = e_1$ und jeweils eine Basis von $L(A, 0)$ und $L(A, e_1)$ an.

6. Im $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, seien die Teilräume

$$H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\},$$
$$U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \ ; \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0, \alpha_1 = \alpha_2\}$$

gegeben.

(a) Geben Sie jeweils eine Basis von $H, U, H \cap U$ und $H + U$ an.

(b) Geben Sie einen Teilraum W von $\mathbb{R}^n$ an, so daß $\mathbb{R}^n = U \bigoplus W$. (Hinweis: Man denke an lineare Gleichungssysteme.)