Klausur zur Linearen Algebra I WS 78/79

Aufgabe 1:

Man berechne in $\mathbb{C}$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^n$ für $n = 1, 2, \dots$.

Aufgabe 2:

a) Sei G eine (multiplikative) Gruppe mit Einselement e. Ferner gelte $a^2 = e$ für alle $a \in G$. Man beweise, daß G kommutativ ist.

b) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Dann ist $G = (\mathfrak{P}(M), \circ)$, wobei $\circ$ der Durchschnitt $\cap$ von Mengen sei, eine Halbgruppe (Beweis!). Besitzt G ein Neutralelement? Ist G sogar eine Gruppe?
Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen!

Aufgabe 3:

a) Sei V der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Funktionen f, g, mit

$$f : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sin x \in \mathbb{R} \text{ und } g : \mathbb{R} \ni x \longmapsto \cos x \in \mathbb{R}$$

in V linear unabhängig sind.

b) Die Vektoren $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\alpha_i \beta_k = \alpha_k \beta_i$$

für alle $1 \leq i, k \leq n$ gilt.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper. Welche Matrizen $A \in M(3 \times 3; K)$ sind bezüglich der Multiplikation mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vertauschbar, d.h. wann gilt $AB = BA$?
(Beachten Sie, daß es Körper mit $1 + 1 = 0$ gibt!)

Aufgabe 5:

Sei $q \in \mathbb{R}$. Man bestimme den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -q & 0 & 4 & q+1 \\ -3 & -6 & 3q & 0 & -12 & -(2q+2) \\ 2 & 4 & -2q & 1 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & -2q & -2 & 4 & 6q+6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

Sei $\mathcal{K} = (e_1, e_2, e_3)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}_3$ und $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ mit $f_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man zeige, daß eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ mit $F(e_i) = f_i, i = 1, 2, 3$ existiert.

Berechnen Sie außerdem die Matrix $M_{\mathcal{K}}(F)$.

Aufgabe 7:

Die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ sei definiert durch

$$T \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha_1 + \alpha_3 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne $M_{\mathcal{K}}(T)$, wobei $\mathcal{K}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}_3$ ist.

b) Man berechne $M_{\mathcal{A}}(T)$ mit $\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

c) Ist T invertierbar?