Probeklausur zur linearen Algebra WS 93/94

1. Seien V ein Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie, daß $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, falls $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

2. Seien V ein Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$ und $a_1, \ldots, a_k$ ein Vektorsystem in V mit $k < n$. Man zeige: $a_1, \ldots, a_k$ ist dann und nur dann linear abhängig, wenn $a_1, \ldots, a_k, v$ für alle $v \in V$ linear abhängig ist.

3. Es seien U, V, W endlich dimensionale Vektorräume und $K : U \to V$ und $L : V \to W$ lineare Abbildungen.

   (a) Man zeige, daß für die lineare Abbildung $L \circ K$ $\quad Rang L \circ K \leq Rang K$ gilt.

   (b) Man zeige, daß in a) Gleichheit gilt, falls L injektiv ist.

4. Man bestimme den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ a_3 + a_1 & a_3 + a_2 & a_3 + a_3 & \cdots & a_3 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & a_n + a_n \end{pmatrix}$$

   mit $a_i \in \mathbb{R}, a_i \neq a_j$ für $1 \leq i, j \leq n$.

5. Es seien e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die Abbildung, die durch

$$L(e_1) = (1, 2, 3, 4), \ L(e_2) = (0, 1, 2, 1),$$

$$L(e_3) = (1, 0, 1, 0), \ L(e_4) = (2, 1, 1, 1)$$

   gegeben ist. Man untersuche die Injektivität und Surjektivität von L.

6. Man gebe an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es 1/2 Punkt. Für jede falsche Entscheidung -1 Punkt. Für keine Entscheidung gibt es 0 Punkte. Als Gesamtsumme der Aufgabe gibt es mindestens 0 Punkte.

   ( ) Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Es gebe reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ mit $v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

   ( ) Seien X, Y $\quad K$–Vektorräume, V, W Untervektorräume von X. Sei $\dim W = n, \dim V = m$. Dann gilt $\dim(sp(V \cup W)) \leq n + m$.

( ) Sei X ein K–Vektorraum, U, V, W Unterräume von X. Dann gilt $U \cup (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$.

( ) Sei V ein endlich dimensionaler K–Vektorraum und W echter Unterraum von V. Dann gibt es zwei verschiedene Untervektorräume V_1, V_2 von V mit $V = W \bigoplus V_1$ und $V = W \bigoplus V_2$.