Nachklausur zur linearen Algebra WS 93/94

1. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + \lambda z &= 3 \\ x + \lambda y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen?

2. Gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

   (a) $f((x, y)) = (x^2, 1)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

   (b) $f((x, y)) = (x, x - y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

3. Seien V, W Vektorräume, $v_1, \ldots, v_k$ Vektoren aus V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man zeige oder widerlege

   (a) $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ linear unabhängig $\Rightarrow v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

   (b) $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig $\Rightarrow f(v_1), \ldots, f(v_k)$ linear unabhängig.

4. Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Man zeige, daß durch $aRb \Leftrightarrow a - b \in U$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert ist.

5. Sei $V^{n,n}$ der Vektorraum der quadratischen $n \times n$–Matrizen über einem Körper K. Man zeige, daß der Untervektorraum der schiefsymmetrischen Matrizen von V die Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ hat.

6. Man gebe an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es 1/2 Punkt. Für jede falsche Entscheidung -1 Punkt. Für keine Entscheidung gibt es 0 Punkte. Als Gesamtsumme der Aufgabe gibt es mindestens 0 Punkte.

   ( ) Sei V ein reeller Vektorraum, W eine nichtleere Teilmenge von V. Dann gilt: W ist Untervektorraum von V genau dann, wenn für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $u, v, w \in W$ gilt $\alpha u + \beta v + \gamma w \in W$.

   ( ) Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{C}$. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ einen Untervektorraum U von V mit $f|U$ ist die Nullabbildung.

   ( ) Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Dann gilt V enthält genau n verschiedene eindimensionale Untervektorräume.

   ( ) Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat für $m > n$ stets keine nichttriviale Lösung.