Klausur zur Linearen Algebra WS 93/94

1. Gegeben seien die Vektoren $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (0,1,0)$, $a_3 = (0,0,1)$, $a_4 = (2,1,3)$, $b_1 = (1,2,4,1)$, $b_2 = (1,1,0,1)$, $b_3 = (-1,0,4,-1)$, $b_4 = (0,5,20,0)$.

   (a) Man zeige: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $f(a_i) = b_i$, $i = 1,2,3,4$.

   (b) Man bestimme $Rang f$ und eine Basis von $Kern f$.

2. Ist $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y \cdot z = 0\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Seien V, W endlich dimensionale K–Vektorräume und $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung. Weiter seien X, Y Unterräume von V. Man zeige: $X \bigoplus Y \Leftrightarrow f(X) \bigoplus f(Y)$.

   (b) Man beweise oder widerlege die Behauptung, wenn f nicht injektiv zu sein braucht.

4. Man bestimme den Rang der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

5. Sei V ein Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_k \in V \setminus \{0\}$ Vektoren. Man zeige: Sind $v_1, \dots, v_k$ linear abhängig, dann existiert ein $i \in \{2, \dots, n\}$ mit $v_i \in sp\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

6. Man gebe an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Für jede richtige Entscheidung gibt es 1/2 Punkt. Für jede falsche Entscheidung -1 Punkt. Für keine Entscheidung gibt es 0 Punkte. Als Gesamtsumme der Aufgabe gibt es mindestens 0 Punkte.

   ( ) Sei V Vektorraum über $\mathbb{R}$. W eine nichtleere Teilmenge von V. Dann gilt W ist kein Untervektorraum von $V \Rightarrow spW \neq W$.

   ( ) Sei V n–dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Teilmenge $A \subset V$ enthalte $m \neq n$ Vektoren. Dann ist A keine Basis von V.

   ( ) Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^n$ eine Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann ist f linear.

   ( ) Sei V ein Vektorraum mit Basis $v_1, \dots, v_n$. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $Kern f \neq \{0\}$. Dann gibt es ein i mit $1 \leq i \leq n$ mit $f(v_i) = 0$.