Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Geburtsdatum:
Studiengang (exakt):

1	2	3	4	5	6	Σ

Aufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

PD Dr. Jörg Jahnel

Klausur — Sommersemester 2013

Fangen Sie bitte für jede Aufgabe ein **neues Blatt** an, um uns die Korrektur zu erleichtern.
Vergessen Sie bitte nicht, auf **jedem Blatt** Ihren Namen anzugeben.
Hilfsmittel wie Notizen oder Taschenrechner sind **nicht** zugelassen. Es ist eine Bearbeitungszeit von 90 Minuten vorgesehen.
Beachten Sie, daß bei den folgenden Aufgaben nicht nur nach einem Ergebnis gefragt wird. Zu einer vollständigen Bearbeitung gehört auch ein korrekter Lösungsweg mit nachvollziehbaren Begründungen.
Bei jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden. Wer 12 Punkte erreicht hat, hat die Klausur auf jeden Fall bestanden. Viel Erfolg!

---

1. a) Definieren Sie die Begriffe "Erzeugendensystem" und "Basis" für einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
b) Konstruieren Sie eine Basis für den von

$$v_1 = (1, -2, 0, 1), v_2 = (0, 0, 2, 5), v_3 = (-2, 4, 2, 3)$$

erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ und ergänzen Sie diesen dann zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie für die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

die Matrix $M_B^B(f)$, falls
a) $B = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$,
b) $B = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -x & 2 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 3 & 3 & -2-x \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

für $x \in \mathbb{R}$.
b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Bitte wenden!

4. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit der reellen Zahl φ.

5. a) Gibt es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ mit $\dim \operatorname{kern} f = 2$ und $\dim \operatorname{bild} f = 2$?
b) Gibt es eine lineare Abbildung $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ mit $\dim \operatorname{kern} g = 2$ und $\dim \operatorname{bild} g = 3$?
Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder beweisen Sie die Nichtexistenz.

6. Sei $V := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei seien $f+g$ und λf für $f, g \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f+g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)+g(x) \qquad \text{und} \qquad \lambda f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lambda f(x)\,.$$

Prüfen Sie, ob $U := \{f \in V \mid \forall x \in \mathbb{R}\colon f(x) = f(-x)\}$ ein Untervektorraum von V ist.

Termin: Montag, 15. Juli 2013, 14–16 Uhr