Name: ....
MatrNr: ....

Studiengang: (zutreffenden bitte ankreuzen):

☐ Bachelor Mathematik ☐ Bachelor Physik ☐ Bachelor Informatik

☐ Lehramt Mathematik ☐ Lehramt Physik ☐ ________________

Bitte erst nach dem Signal umblättern.

Klausur

Analysis 1

11. Februar 2010 (Weiberfastnacht), Wintersemester 2009/2010

Sie erhalten 9 Blätter: dieses Titelblatt, 1 Aufgabenblatt mit 5 Aufgaben, 5 Blätter für die Lösungen (auf jedem Blatt steht nochmals die entsprechende Aufgabe), 2 Schmierpapierblätter. Nach Bedarf bekommen Sie mehr Schmierpapier.

Bitte beschriften Sie dieses Titelblatt und alle Lösungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer, auch wenn Sie die Aufgabe nicht bearbeitet haben.

Geben Sie dieses Titelblatt und alle 5 Lösungsblätter *sortiert* ab. Das Aufgabenblatt und das Schmierpapier dürfen Sie behalten. Notizen, die nicht auf den Lösungsblättern stehen (z.B. auf dem Schmierpapier) werden *nicht* bewertet.

Es sind keine Hilfsmittel (Nachschlagewerke, Notizen, Rechner usw.) erlaubt.

Die Ergebnisse werden in Moodle bekannt gegeben.

Zur Kontrolle halten Sie bitte einen Lichtbildausweis bereit.

Viel Erfolg!

Wird vom Korrektor ausgefüllt!

	1	2	3	4	5	$\sum$	Note
Punkte							

Klausuraufgaben (Insgesamt: 60 Punkte)

Bitte schreiben Sie die Lösung jeder Aufgabe auf das entsprechende Lösungsblatt!

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)(n+2)}{(3n+1)(n+3)}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 7^n + 9^n}$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \tan(x)}{e^x - 1}$.

   (d) $\lim\limits_{x\searrow 0} x^x$. *Hinweis: Nutzen Sie* $a^b = \exp(b \cdot \ln(a))$.

   (3+3+3+3 Punkte)

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.

   (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n^2+n} x^n$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

   (3+3+6 Punkte)

3. Zeigen Sie $\dfrac{b-a}{b} < \ln\left(\dfrac{b}{a}\right) < \dfrac{b-a}{a}$ für $0 < a < b$.

   Hinweis: Nutzen Sie den Mittelwertsatz und die Monotonie der Logarithmusfunktion. *(10 Punkte)*

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale. Achten Sie dabei darauf, ob die Intergrale bestimmten oder unbestimmt bzw. eigentlich oder uneigentlich sind.

   (a) $\displaystyle\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x} dx$.

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2-4} dx$.

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$.

   (4+4+6 Punkte)

5. **Für Bachelor Mathematik:** Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Zahlenfolge $(a_n)_n$ durch $a_1 = x$ und $a_n = 1 - n \cdot a_{n-1}$ für $n \geq 2$ definiert. Man bestimme alle x, für die *alle* Glieder der Folge $(a_n)_n$ nicht-negativ sind.

   Hinweise: Berechnen Sie die ersten Folgenglieder in Abhängigkeit von x, versuchen Sie daraus Bedingungen an x herzuleiten und eine allgemeine Formel für die a_n aufzustellen.

   Für Bachelor Physik: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $x^2 \cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie daraus $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$ und $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} x^2 \cos(nx) dx$.

   Für Bachelor Informatik und Lehramt: Bestimmen Sie von der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{4}{x+1}$ die Nullstellen, Polstellen, lokalen Minima und Maxima, das Monotonieverhalten und das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

   (12 Punkte)

Mat.-Nr.:
Vorname:
Nachname:

Aufgabe 1

Punkte:	/12
(Wird vom Korrektor ausgefüllt.)	

1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-1}$.

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1}$.

   (c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3\cos(x)}{\sin(x)-x}$.

Mat.-Nr.:
Vorname:
Nachname:

Aufgabe 2

Punkte: /10
(Wird vom Korrektor ausgefüllt.)

2. Bestimmen Sie

$$a = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} \,.$$

Zeigen Sie dafür, dass die Folge $(a_n)_n$ mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ konvergent ist, und bestimmen Sie deren Grenzwert.

Mat.-Nr.:
Vorname:
Nachname:

Aufgabe 3

Punkte: /9
(Wird vom Korrektor ausgefüllt.)

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+1}$.

Mat.-Nr.:
Vorname:
Nachname:

Aufgabe 4

Punkte: /9
(Wird vom Korrektor ausgefüllt.)

4. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n}{4^n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 - n^2}$.

Mat.-Nr.:
Vorname:
Nachname:

Aufgabe 5

Punkte: /10
(Wird vom Korrektor ausgefüllt.)

5. Für Bachelor Mathematik: Es sei $(a_n)_n$ eine Nullfolge und $(b_n)_n$ beschränkt. Zeigen Sie, dass $(a_n \cdot b_n)_n$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

   Für Lehramt Mathematik: Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+3}$. Sind diese Maximum bzw. Minimum der Funktion?

Schmierpapier

Schmierpapier