Universität Siegen Prof. Dr. E. Kaufmann

Klausur zu Stochastik I, WS 12/13

1. Februar 2013

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Zeit: 90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel:

- handschriftliche Formelsammlung 2 DIN A4 Seiten ohne Lösungen der Übungsaufgaben.

Bitte geben Sie die Formelsammlung mit der Klauaur ab.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte max.	3	5	6	6	4	24
Punkte						
Note						

1. Sei $\lambda > 0$ und X eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{(e^\lambda - 1)k!} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$. (3)

2. Ein Preis soll nach folgendem Schema unter den Personen A, B und C verlost werden: Der Schiedsrichter wählt (gleichverteilt) eine der Zahlen $1, 2$ oder 3. Als erstes wird Person A nach der Zahl gefragt. Rät sie richtig, so erhält sie den Preis, sonst darf Person B raten. Die von A genannte Zahl ist B bekannt. Rät auch Person B falsch, so bekommt Person C den Preis ohne weiteres Raten.

Person C fühlt sich benachteiligt und protestiert mit der Begründung, sie habe eine geringere Gewinnwahrscheinlichkeit als die anderen Mitspieler. Protestiert C zu recht (Beweis)? (5)

3. Sei $\mathcal{L}(X, Y)$ die Gleichverteilung auf $S = \{(0,0), (1,1), (2,0)\}$. Bestimmen Sie

   (a) $\mathcal{L}(X)$ und $\mathcal{L}(Y)$,

   (b) $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   (c) Sind X, Y unabhängig? (6)

4. Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Die sogenannte empirische Verteilungsfunktion $F_n(x)$ zu $X_1, \ldots, X_n$ ist definiert durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{(-\infty, x]}(X_i).$$

Bestimmen Sie $E(F_n(x))$ und $\mathrm{Var}(F_n(x))$ und zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} P\left(\Big\{|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\Big\}\right) = 0.$$

für alle $\varepsilon > 0$. (6)

5. Man zeige: $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ-Algebra. (4)

Viel Erfolg!