Name, Vorname (Blockschrift!):
Matrikelnummer:
Geburtsdatum:
Studiengang (exakt):
Postanschrift:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

Aufgaben zur Vorlesung Analysis I

PD Dr. Jörg Jahnel

Klausur **Wintersemester 2011/12**

Fangen Sie bitte für jede Aufgabe ein **neues Blatt** an, um uns die Korrektur zu erleichtern. Vergessen Sie bitte nicht, auf **jedem Blatt** Ihren Namen anzugeben.

Hilfsmittel wie Notizen oder Taschenrechner sind **nicht** zugelassen. Es ist eine Bearbeitungszeit von 90 Minuten vorgesehen.

Beachten Sie, daß bei den folgenden Aufgaben nicht nur nach einem Ergebnis gefragt wird. Zu einer vollständigen Bearbeitung gehört auch ein korrekter Lösungsweg mit nachvollziehbaren Begründungen.

Bei jeder Aufgabe können maximal vier Punkte erreicht werden. Wer 12 Punkte erreicht hat, hat die Klausur auf jeden Fall bestanden. **Viel Erfolg!**

---

1. Entscheiden sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Markieren Sie dazu die Antworten mit einem W für wahre Aussagen und einem F für falsche Aussagen. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

☐ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x_n < C$ für ein $C \in \mathbb{R}$ und alle $n \in N$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < C$.

☐ Ist (x_n) eine Cauchyfolge, so ist (x_n) beschränkt.

☐ Es gibt eine gleichmäßig stetige und gleichzeitig unbeschränkte Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

☐ Wenn für alle n die Ungleichung $x_{n+1}/x_n < 0{,}99$ gilt, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

2. Betrachten Sie in $\mathbb{R}$ die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 1}$, die gegeben sind durch

$$a_n := \frac{7n^2+6n-5}{3n^2+2n+1},\quad b_n := \frac{n^3}{2^n},\quad c_n := \frac{n!}{n^n} \quad \text{bzw.} \quad d_n := \frac{8n^5+3n-5}{3n-5}.$$

Welche der angegebenen Folgen sind konvergent? Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

3. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty\prime} \frac{1}{n}$$

Hierbei soll das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty\prime}$ andeuten, daß die Summe nur über diejenigen $n \in \mathbb{N}$ zu erstrecken ist, in deren Dezimaldarstellung die Ziffer 8 nicht vorkommt.

Bitte wenden!

4. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

5. a) Wieviele Lösungen hat die Gleichung $(y-1)e^y = 500$?
b) Wieviele Lösungen hat $(y-1)e^y = -\frac{1}{2}$?

6. a) Geben Sie die Stammfunktionen der Funktionen

$$f_1(x) := \frac{1}{x}, \ (x \neq 0) \qquad f_2(x) := \frac{1}{1+x^2}$$

an.

b) Angenommen, Ihr Hiwi möchte eine 20m^2 große und 3m tiefe Grube ausheben. Leider ist der Boden mit Gift verseucht. An der Oberfläche wird eine Giftkonzentration von 8g/m^3 gemessen. Die Giftkonzentration $k(x)$ (in g/m^3) verringert sich mit der Tiefe x (in Metern) nach der Formel $k(x) = 8e^{-0.6x}$.
Wieviel Gift ist in der gesamten auszuhebenden Erde enthalten?

Termin: Dienstag, 31. Januar 2012, 18 Uhr