Probeklausur

zur Funktionentheorie SS 2010

29.06.2010

Aufgabe 1

Bestimmen und skizzieren Sie die Menge der komplexen Zahlen, deren Abstand von 0 höchstens doppelt so groß ist wie von $-i$. Ist diese Menge ein Gebiet in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 2

In welchen Punkten der komplexen Ebene ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x + iy) := x^2 + y^2 + i(x^2 - y^2)$$

reell differenzierbar, komplex differenzierbar, holomorph?

Aufgabe 3

(a) Berechnen Sie den Wert von

$$\int_\gamma \mathrm{Re}(z)\, dz$$

mit $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := (t^2 + t)(1 - i)$.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{|z-3/2|=1} \frac{e^z}{z(z^3 - 1)}\, dz.$$

Aufgabe 4

Entwickeln Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

in den folgenden Ringgebieten in eine konvergente Laurentreihe:

$$\text{(a) } \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\},$$
$$\text{(b) } \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}.$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die folgenden reellen Integrale:

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)}\,dx$$
$$\text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^k} \quad , \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 6

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ erklärt durch $g(z) := f(\frac{1}{z})$.
Zeigen Sie: Genau dann hat g in 0 eine wesentliche Singularität, wenn f kein Polynom ist.