Auszüge aus Stochastik I Klausuren Scheffler

Aufgabe 1
Die 4 Seiten eines tetraederförmigen "Würfels "sind jeweils mit den Zahlen 1,2,3,4 beschriftet und treten beim Werfen mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Der Tetraeder wird zweimal geworfen und die untenliegenden Zahlen X_1 undX_2 notiert.

(a) Bestimmen Sie die Zähldichte der Verteilung $P_{x_1+x_2}$ von $X_1 + X_2$

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von $X_1 + X_2$

(c) Definieren Sie

(c_1) die Zähldichte einer Verteilung auf einer abzählbaren Menge

(c_2) den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariablen

Aufgabe 2
Es wird mit drei (idealen) Würfeln geworfen. Bei jedem Würfel werden die Augenzahlen $(i, j, k), l \leq i, j, k \leq 6$ notiert.
S_n resp. M_n bezeichnet die **Summe** resp. das **Minimum** der Augen beim n-ten Wurf mit drei Würfeln.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten bei einem Wurf

(1_1) die Augensumme $Sn = 16$

(2_2) das Minimum $M_n = 5$ zu erhalten.
($\mathit{Kontrolle}$: $P\{S_n = 16\} = 1/36, P\{M_n = 5\} = 7/6^3$)

(b) (1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\{M_n = 5\} \cap \{S_n = 16\})$an.

(2) Sind bei (festen n) M_n und S_n unabhängig?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit unter n Würfeln mit drei Würfeln mindestens einmal die Augensumme $S_i = 16$ zu erzielen? $(1 \leq i \leq n)$

(d) Geben Sie die Definition der Unabhängigkeit

(1) von Ergebnissen

(2) von Zufallsvariablen

an

Aufgabe 3
Ablenkeinheiten für Fernsehröhrn werden einer sorgfältigen Endkontrolle unterzogen. Der automatische Kontrollvorgang weist folgende statistische Parameter auf:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine fehlerfreie Einheit auch als fehlerfrei erkannt wird, ist $0,98$; die Wahrscheinlichkeit, dass eine Einheit defekt ist, beträgt $0,08$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(a) Eine durch die Kontrolle als fehlerfrei deklarierte Ablenkeinheit ist tatsächlich fehlerfrei.

(b) Eine durch die Kontrolle als defekt deklarierte Ablenkeinheit ist tatsächlich defekt.

(c) Eine durch die Kontrolle als fehlerfrei deklarierte Ablenkeinheit ist in Wirklichkeit defekt.

(d) (1) Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit.

  (2) Geben Die die Bayersche Formel an.

Aufgabe 4
Bei einem Multiple-Choice Test mit 10 Aufgaben sind pro Aufgabe 4 Antworten möglich, von denen genau eine richtig ist. Ein Kandidat, der schlecht vorbereitet ist, kreuzt die Antworten zufällig an.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit

  (1) alle Antworten richtig

  (2) alle Antworten falsch

  zubeantworten

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 Aufgaben richtig sind. (Stellen Sie das Ergebnis als Bruch dar.)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 schlecht vorbereiteten Teilnehmern am Test mindestens eine komplett richtige Lösung dabei ist?

(d) Definieren Sie

  (1) die Gleichverteilung auf einer endlichen Menge

  (2) die Binominalverteilung mit Parametern n,p. (Es reicht den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum und die Zähldichte anzugeben.)

Aufgabe 5
Auf den Strecken zwischen den Punkten (1,0) und (1,1) sowie zwischen (2,0) und (2,1) in der Ebene wird jeweils ein Punkt zufällig ausgewählt.

(a) Geben Sie ein geeignetes mathematisches Modell (unter der Annahme, dass die beiden Punkte unabhängig voneinander ausgewählt werden) an.

(b) Es bezeichne X_1 bzw. X_2 den zufällig ausgewählten Punkt als Element von [0,1]. Zeigen Sie dass X_1 und X_2 unabhängig sind.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Schnitt der Verbindungsgeraden dieser zwei Punkte mit der x-Achse rechts vom Nullpunkt liegt.

(d) (1) Definieren Sie die kontinuierliche Gleichverteilung.

(2) Definieren Sie die Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen.

Aufgabe 6

$X_1 \cap \to R_+$ seien Zufallsvariablen für $1 \leq i \leq n$, die nach einer Exponentialverteilung mit Parameter $\alpha > 0$ verteilt sind. Die $(X_i)_{i \leq ????}$ seien unabhängig. Sei $M_n = \underset{min}{1 \leq i \leq} nX_i$.

unklar was an dieser Stelle stehen sollte

(a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F_{M_n} sowie die Dichte der Verteilung von M_n

(b) Verifizieren Sie:

(1) $E(X_i) = {}^1\!/\!_\alpha$

(2) $E(X_i) = {}^2\!/\!_{\alpha^2}$

und berechnen Sie die Erwartungswert und Varianz von M_n

(c) Es seien $\epsilon > 0$. Schätzen Sie $P\{|n \cdot M_n| \leq \epsilon\}$ mit der Tschebyscheff-Ungleichung ab

(d) (1) Definieren Sie die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable

(2) Formulieren Soe die Tschebyscheff-Ungleichung

Aufgabe 7

Es sei $F(x) = exp(-exp(-x)), x \in \mathbb{R}$

(a) (1) F eine Verteilungsfunktion ist

(2) die zugehörige Verteilung eine Dichte besitzt und geben Sie diese Dichte an

(b) Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X = F$. Sei $Y = e^x$. Geben Sie die Verteilungsfunktion von Y und -falls sie existiert- die Dichte an

(c) $X_1 X_2$ seien unanbhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Für $b \in \mathbb{R}$ sei $Y = max(X_1 - b, X_2 - b)$. Geben Sie die Verteilungsfunktion von Y an. Wie muss $b \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $F_y = F$ gilt?

(d) Definieren Sie

  (1) den Begriff der Dichte einer Verteilung

  (2) den Begriff einer reellwertigen Zufallsvariablen