Universität Siegen
Fachbereich 6 – Mathematik

Prof. Dr. B. Dreseler
& Analysisteam

# Klausur zur Vorlesung
# Analysis III

Wintersemester 2009/2010
Siegen, den 11.02.10

Name, Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\sum$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 24 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | | |

**Name:**____________________________ **Vorname:** ____________________________

**Aufgabe 1**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2 + (x^2 - 2)^2 + (y^2 + 2)^2.$$

Bestimme alle lokalen Extrema

**Aufgabe 2**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(r, \varphi, \theta) = (r\cos(\varphi)\cos(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)).$$

a) Berechne die Jacobi-Matrix $Df$.
b) An welchen Stellen ist $f$ lokal umkehrbar?

**Aufgabe 3**
Bestimme drei positive reelle Zahlen $x, y, z$ mit $xyz = 8$ so, dass die Summe der Quadrate der Zahlen $x, y, z$ minimal wird.

**Aufgabe 4**
Integriere die Funktion $x^2y^2$ über

a) den Kreis $K_R(0)$
Hinweise:
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x), \quad \sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

b) das Dreieck $\Delta^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

**Aufgabe 5**
a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cup [0, 1]; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

b) Gegeben seinen folgende Mengen:

$$A(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le t^2\}, t \in \mathbb{R},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \in \mathbb{Q} \vee y = \frac{1}{\pi}\}$$
$$C = \bigcup_{k=0}^{2010} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2^k < |x| < 4^k\}$$

Bestimme

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_{A(t)\cap B\cap C}(x,y)d(x,y)$$

**Aufgabe 6**

Es sei $B$ das offene Dreieck der $xy$-Ebene mit den Ecken (0,0),(1,0),(1,1). Begründen Sie: Die Funktion $f$ auf $B$, die definiert ist durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(x)}{x}$$

ist integrierbar über $B$. Berechnen Sie $\int_B f(x,y)d(x,y)$.

Viel Erfolg!