Aufgabe 1

Begründe: f ist über $[0,1]$ integrierbar. Berechne das Integral.

$$\int_{[0,1]} f(x)\ dx, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ x^{-\frac{1}{3}} & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Aufgabe 2

Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(-\frac{1}{x^{1+\frac{1}{n}}}\right) 1_{[1,\infty)}(x)$

a) Zeige, dass f_n für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$ integrierbar ist und berechne das Integral $\int f_n\ dx$.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n\geq 1}$? Bestimme für diese x den punktweisen Grenzwert $f(x)$.

c) Bestimme $\lim_{n\to\infty} \int f_n\ dx$, falls der Grenzwert existiert.

d) Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, so dass $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ gilt?

Aufgabe 3

Sei $f : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ Lebesgue-integrierbar. Berechne mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n(x) f(x)\ dx.$$

Hinweis: Betrachte $g_n(x) = \sin^n(x) f(x)$ auf $[0,\pi],\ n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

Berechne für $n = 2$ und $n = 3$.

$$\int_{K_1(0)} \frac{2}{||x||_2^2 + 1} d^n x.$$

Aufgabe 5

Sei $a > 0$ und $S_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq a^2\}$.

Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x, y) = x^2 1_{S_a}(x, y) \text{ und } g(x, y) = y^2 1_{S_a}(x, y).$$

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ h(x, y) = (y, x)$.

a) Zeige, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^2)$ gilt.

b) Zeige $f \circ h = g$. Folgere daraus, ohne die Integrale zu berechnen, dass gilt:

$$\int f \ d(x, y) = \int g \ d(x, y) \text{ und } \int f \ d(x, y) = \frac{1}{2} \int (f + g) \ d(x, y).$$

c) Berechne das Integral $\frac{1}{2} \int (f + g) \ d(x, y)$.

Hinweis zu c): Benutze ohne Beweis, dass die Abbildung

$$P : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

stetig differenzierbar ist und injektiv auf $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$.

Aufgabe 6

Integriere $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ über

$$B := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \ -3 \leq z \leq 0\right\}.$$

Zeige zunächst, dass f über B integrierbar ist.