Universität Siegen
Fakultät IV– Department Mathematik

Prof. Dr. B. Dreseler
& Analysisteam

Klausur zur Vorlesung
Analysis II

Wintersemester 2010/2011
Siegen, den 15.02.11

Name, Vorname: ________________________

Matrikelnummer: ________________________

Studiengang: ________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9*	$\sum$
erreichbare Punkte	4	6	6	4	6	4	4	6	(4)	40
erreichte Punkte										

Aufgabe 9 ist eine Bonusaufgabe um zusätzliche Punkte zu erlangen.

Zugelassene Hilfsmittel: **keine**

Aufgabe 1

a) Unter welchen Voraussetzungen an die Folge von Regelfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \quad ?$$

b)Untersuche die Funktionenfolge auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n|x|}$$

Aufgabe 2

Berechne folgende Integrale:

$$\text{a)} \int\limits_0^{\ln(\pi)} \frac{\cos(e^x)}{e^{-x}}\mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})\cos(\frac{1}{x})}{x^2}\mathrm{d}x$$

c) Zeige für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_a^b e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq b - a.$$

Aufgabe 3

a) Zeige die folgenden Ungleichungen:

$$||x^2e^{-x^2}|| \leq 1 \text{ und } ||x^4e^{-x^2}|| \leq 1,$$

mit $||f|| := \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$.

b) Zeige, dass folgendes Integral existiert:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Hinweise: Teile das Integral auf und schätze nach oben ab. Verwende ggf. Aufgabenteil a).

Aufgabe 4

Überprüfe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Aufgabe 5

a) Was besagt die Regel von L'Hospital?
   Mit welchem wichtigen Satz der Analysis wird diese Regel bewiesen?

b) Wie lautet die Lagrange-Form für das Restglied $R_{n+1} = f - T_n f$, wobei $T_n f$ die Taylorentwicklung der Funktion f zum Grade n ist?

b) Bestimme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
   i) mit der Regel von L'Hospital,
   ii) mittels Taylorentwicklung von $\sin(x)$ um den Nullpunkt.

Aufgabe 6

a)Warum gilt für $t \in (-1, 1)$ und $x \in (-1, 1)$

$$\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k \mathrm{d}t \quad ?$$

b) Zeige mit Aufgabenteil a) für $x \in (-1, 1)$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x).$$

Aufgabe 7

a) Sei X eine beliebige Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Welche Bedingungen müssen für alle $x, y, z \in X$ erfüllt sein, so dass d eine Metrik auf X definiert?

b) Zeige, dass d_1 eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert:

$$d_1(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Aufgabe 8

Zeige, dass die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.

Zeige weiter:

1. f ist partiell differenzierbar (bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$);
2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind unstetig bei $(0,0)$;
3. f ist nicht differenzierbar bei $(0,0)$.

Bonusaufgabe 9

Zeige, dass folgende Funktion im Punkt (0/0) ein lokales Minimum besitzt.

$$f(x,y) = (x^2 + 2y^2)\exp(-x^2 - y^2), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Viel Erfolg!