Aufgabe 1

Untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

$$\text{a) } a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad , 0 < a < b$$
$$\text{b) } a_n = \frac{(-1)^{n^2+3n+1} n^3}{xn^3 + 2n + 3} \quad , x \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

Untersuche die rekursiv definierte Folge auf Konvergenz und bestimme ggf. den Grenzwert.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$$

Ändert sich das Verhalten der Folge für den Startwert $a_1 = 11$?

Aufgabe 3

Wie lautet das Konvergenzkriterium von Cauchy für Folgen?

Zeige die Implikation $A \Longrightarrow B$ mit

A : Die Folge a_n konvergiert gegen a für $n \to \infty$.
B : a_n ist eine Cauchy-Folge.

Aufgabe 4

Handelt es sich bei den gegebenen Aussagen A und B jeweils um eine Äquivalenz oder um eine Implikation? (Bei Implikation: In welche Richtung)? Gebe für den Fall einer Implikation ein Gegenbeispiel an, für das die Rückrichtung nicht gilt.

a)	$A : (a_n)_n$ ist eine Nullfolge	$B : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
b)	$A : \sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ konvergiert	$B : \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.
c)	$A : \lim_{k\to\infty} a_k = a \neq 0$	$B : \lim_{k\to\infty} \lvert a_k \rvert = \lvert a \rvert$.
d)	$A : \lim_{k\to\infty} a_k = 0$	$B : \lim_{k\to\infty} \lvert a_k \rvert = 0$.

Aufgabe 5

Untersuche die Reihen auf Konvergenz.

$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(3+2(-1)^k)^k}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{\alpha n^3+\beta n^2},\ \alpha \geq 0, \beta > 0$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \quad n \geq 929.929.$$

Aufgabe 6

Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihen.

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^3}{(3k)!} x^{3k}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k 3^n}{n!} x^n, k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 7

a) Zeige, dass die Funktion f im Intervall $[-1, 1]$ mindestens zwei Nullstellen besitzt.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^6 - 3x^3 + 4x^2 - 1$$

b) Überprüfe die Funktion auf Stetigkeit

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x-1|^{\frac{2x^2-3x-2}{x-2}} & x < 2 \\ 2^x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Aufgabe 8

Beweise die folgenden (Un)gleichungen:

$$a)\ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad 1 \neq x \in \mathbb{R}$$

$$b)\ \forall x \in \mathbb{R} : 1 + x \leq \exp(x)$$