Klausur zur Analysis II — SS 94

Prof. Dr. Reinhardt

Aufgabe 1:
Geben Sie die Taylorreihe von $\frac{1+x}{1-x}$ um $x_0 = 0$ an. Berechnen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 2:
Seien X und Y metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $c \in Y$ und

$$M = \{x \in X \mid f(x) = c\}.$$

Zeigen Sie: M ist abgeschlossen.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \ni (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist.
Hinweis: Der Nullpunkt ist gesondert zu behandeln.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die Länge $L(\varphi)$ von

$$\varphi : [0,1] \ni t \longmapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2.$$

(Bez.: Die zugehörige Kurve Γ_φ bezeichnet man als *Neilsche Parabel.*)

Aufgabe 5:
Für die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^4+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zeige man:

1. f ist partiell differenzierbar (bei allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2$);
2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind unstetig bei $(0,0)$;
3. f ist nicht (vollständig) differenzierbar bei $(0,0)$.

Aufgabe 6:
Zeigen Sie durch Anwendung des Satzes von der impliziten Funktion, daß die Gleichung

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

eindeutig nach y durch eine differenzierbare Funktion $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ auflösbar ist mit $g(0) = 2$ (U ein offeres Intervall um $x = 0$). Geben Sie die Ableitung entsprechend der Ableitungsformel im Satz der impliziten Funktion an und berechnen Sie $g'(1)$.
Hinweis: Durch Anwendung der Ableitungsformel erhalten Sie eine Gleichung für $(g^2)'$, die Sie integrieren und damit $g(1)$ und $g'(1)$ ausrechnen können.