Analysis II SS 00

Prof. Dr. H.-J. Reinhardt

---

1. Berechne den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(4+(-1)^n)^{3n}}$$

(4)

Lösung:

$$\begin{aligned}
a_n &= \begin{cases} 0 & \text{n ungerade,} \\ (4+(-1)^{-\frac{n}{2}})^{-\frac{2n}{2}} & \text{n gerade} \end{cases} \\
\sqrt[2\nu]{a_{2\nu}} &= (4+(-1)^{\nu})^{-\frac{3\nu}{2\nu}} \\
&= (4+(-1)^{\nu})^{-\frac{3}{2}} \\
&= \begin{cases} 5^{-\frac{3}{2}} & \nu \text{ gerade,} \\ 3^{-\frac{3}{2}} & \nu \text{ ungerade} \end{cases} \\
\Rightarrow \limsup_{\nu} \sqrt[2\nu]{a_{2\nu}} &= 3^{-\frac{3}{2}}, \\
r &= \frac{1}{\limsup_{\nu} |\sqrt[2\nu]{a_{2\nu}}|} \\
&= 3^{\frac{3}{2}} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

2. Sei (X, τ_X) ein topologischer Raum mit irgendeiner Topologie τ_x und (Y, τ_Y) ein topologischer Raum mit der chaotischen Topologie $\tau_Y = \{0, Y\}$. Zeige: Jede Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig. (4)

Lösung: Z.z.: Urbild jeder offenen Menge ist offen (für belibiege Abbildungen $f : X \to Y$)
Sei $V \subset Y$ offen, d.h. $V = \emptyset$ oder $V = Y$. Da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau_X, f^{-1}(Y) = X \in \tau_X \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$.

3. Berechne die Länge von

$$\varphi : [1,5] \ni t \mapsto (\frac{t^2}{2} - t + 2, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}).$$

(4)

Lösung:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= (t-1, 2t^{\frac{1}{2}}) \\
\|\varphi'(t)\| &= \sqrt{t^2 - 2t + 1 + 4t} \\
&= \sqrt{t^2 + 2t + 1} \\
&= \sqrt{(t+1)^2} \\
&= t + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(\varphi) &= \int_1^5 \|\varphi'(t)\| \text{ dt} \\
&= \int_1^5 t + 1 \text{ dt} \\
&= \left[\frac{1}{2}t^2 + t\right]_1^5 \\
&= \frac{25 + 10 - 1 - 2}{2} \\
&= \frac{32}{2} \\
&= 16
\end{aligned}$$

4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f_1(x,y,z) = x^2y - 5z, \qquad f_2(x,y,z) = 2x + 4yz - 3z^3.$$

Berechne für $\underline{x}^0 = (-1, 0, 1)$, $\underline{w} = (2, 1, 3)$

$$f'(\underline{x}^0)\underline{w}$$

und die Richtungsableitungen von f_i, $i = 1, 2$, in Richtung $\underline{w}$ an der Stelle $\underline{x}^0$. (4)

Lösung:

Sei $f(x,y,z) := (x^2y - 5z.2x + 4yz - 3z^3)$, $\underline{x}^0 = (-1, 0, 1)$, $\underline{w} = (2, 1, 3)$.

Zu f':

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = -5,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 4z, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = -9z^2$$

$$\Rightarrow f'(\underline{x}^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}, \qquad f'(\underline{x}^0)\underline{w} = (-14, -19)$$

Richtungsableitungen: $\underline{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 1, 3)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) &= \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-14) &= -\sqrt{14}, \\
\frac{\partial f_2}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) &= \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-19) &= \frac{-19}{\sqrt{14}}
\end{aligned}$$

5. Entwickle $f(x,y) = \sin x \sin y$ in einer Umgebung U des Nullpunktes $\underline{x}^0 = (0,0)$ nach der Taylorformel; dabei soll das Restglied die Partiellen Ableitungen 2. Ordnung enthalten.
Zeige für das Restglied die Abschätzung

$$|R_1(\underline{x}^0;\underline{x})| \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|)^2 \ \forall \underline{x} = (x,y) \in U.$$

(4)

Lösung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cos y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$$

Taylor-Formal bei $\underline{x}^0$, $\underline{x} := (x,y)$:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \underbrace{f(\underline{x}^0)}_{=0} + (\underline{x} - \underline{x}^0)\nabla f(\underline{x}^0) + R_1(\underline{x}^0, \underline{x} - \underline{x}^0) \\ &= x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}}_{=0} + y \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(0,0)}}_{=0} + R_1(\underline{x}^0, \underline{x} - \underline{x}^0) \end{aligned}$$

mit

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)), \text{ usw.}$$

folgt

$$\begin{aligned} R_1(\underline{x}^0, \underline{x} - \underline{x}^0) &= \frac{1}{2}(x^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial y^2}) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2 \sin\vartheta x \sin\vartheta y + 2xy \cos\vartheta x \cos\vartheta y + -y^2 \sin\vartheta x \sin\vartheta y) \\ &= -\frac{1}{2}((x^2+y^2)\underbrace{\sin\vartheta x}_{\leq 1} \sin\vartheta y - 2xy \cos\vartheta x \cos\vartheta y) \end{aligned}$$

wobei $0 \leq \vartheta \leq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underbrace{\underline{x}^0 + \vartheta(\underline{x} - \underline{x}^0)}_{\vartheta(x,y)}) \\ &= -\sin\vartheta x \sin\vartheta y \\ \Rightarrow |R_1| &\leq \frac{1}{2}\Big[(x^2+y^2) + 2|x||y|\Big] \\ &= \frac{1}{2}(|x|+|y|)^2 \end{aligned}$$

6. Man überprüfe, ob in einer Umgebung von $\underline{x}^0 = (1, \pi)$ durch die Gleichung

$$F(x, y) := e^{\sqrt{x}} \tan y + \frac{y}{x} - 3(x^2 - 1) - \pi = 0$$

eine Funktion $y = g(x)$ implizit gegeben ist und berechne gegebenenfalls $g'(1)$. (4)

Lösung: $F(x^0, y^0) = 0$ für $\underline{x}^0 = (x^0, y^0) = (1, \pi)$, da

$$e \underbrace{\tan \pi}_{=0} + \pi - 0 - \pi = 0$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial y} = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 y} + \frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}^0) = 1 + e \neq 0$$

$\Rightarrow F(x, y) = 0$ ist auflösbar. Es gilt dort $y = g(x)$ mit

$$g'(1) = -\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}^0)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(\underline{x}^0)$$

Aus

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} \tan y + -\frac{y}{x} - 6x,$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{x}^0) = -\pi - 6$$

folgt

$$g'(1) = (1 + e)^{-1}(\pi + 6)$$