Klausur zur Analysis II SS 88

Prof. Dr. Dreseler

Aufgabe 1: $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sei Riemann–integrierbar und

$$\alpha_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}),\ \ n\in\mathbb{N}^{\star}.$$

Man zeige, daß $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \int_0^1 f(x)\,dx$. Man zeige, daß $\{\alpha_n\}$ im allgemeinen nicht konvergiert, wenn f nicht Riemann–int. ist.

Aufgabe 2: Man zeige, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & ,x \text{ rational} \\ 0 & ,x \text{ irrational} \end{cases}$$

auf $[0,1]$ nicht Riemann–integrierbar ist.

Aufgabe 3: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei Riemann–integrierbar und besitze eine Stammfunktion F auf $[a,b]$. Man zeige:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

(Anleitung: $Z=\{x_0,\ldots,x_n\}$ Zerlegung von $[a,b]$. Man betrachte $F(b)-F(a)=\sum\limits_{i=1}^{n}\{F(x_i)-F(x_{i-1})\}$.

Aufgabe 4: Man zeige, daß das Integral

$$\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$$

für $t>0$ existiert und Wert $(1+t^2)^{-1}$ besitzt.

Aufgabe 5:

1. Sei $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$ für $0<x<1$ und $n=1,2,\ldots$. Man zeige, daß $\{f_n\}$ auf $(0,1)$ punktweise aber nicht gleichmäßig konvergiert.
2. Man zeige, daß $\{xf_n\}$ auf $(0,1)$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 6: Man zeige, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\sin nx$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$.

Aufgabe 7: Man zeige, daß die Funktion $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^s$ auf $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 8: Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & ,(x,y)=(0,0) \\ \frac{x^3}{x^2+y^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \end{cases}.$$

Man zeige, daß in allen Punkten alle Richtungsableitungen existieren.