Klausur zur Algebra I WS 82/83

---

1. Bestimmen Sie alle Gruppen der Ordnung ≤ 5. Welche sind auflösbar? (Beweis!)

2. Beweisen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 56.

3. Sei p eine Primzahl, $p \neq 2$. Beweisen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung $2p^n$ $(n \in \mathbb{N})$ auflösbar ist.

4. Zeigen Sie, daß jeder endliche Integritätsring ein Körper ist. (Hinweis: Betrachten Sie Ideale der Form $a^n R$, $n \in \mathbb{N}$).

5. Zeigen Sie, daß f ein Primelement in $\mathbb{Z}[X, Y]$ ist für

   (a) $f = X^n + Y^n - 1$

   (b) $f = Y^6 + XY^5 + 2XY^3 - X^3Y + X^2 + X$

6. Zeigen Sie: $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$ für $n \in \mathbb{N}, n > 1, p$ Primzahl.

7. Bestimmen Sie $m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ für

   (a) $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{5}$

   (b) $\alpha = 2 + \sqrt{5}$

8. Geben Sie ein primitives Element für den Zerfällungskörper von $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$ an und seine sämtlichen Konjugierten.

9. Es sei Y eine Unbestimmte über k und σ der durch $\sigma(y) = y^{-1}$ eindeutig bestimmte k–Automorphismus von $k(y)$. Ferner sei $U = \{Id, \sigma\}$.

   (a) Zeigen Sie: $FixU = k\left(y + y^{-1}\right)$.

   (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von y über $FixU$.

10. Zeigen Sie, daß die Gleichung $X^{2n} + aX^n + b \in \mathbb{Q}[X]$ durch Radikale auflösbar ist $(n \in \mathbb{N})$.