Nachklausur zur Algebra I

Aufgabe 1:
G sei eine Gruppe, $|G| = n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:
$|Aut(G)|/(n-1)!$.

Aufgabe 2:
G sei eine Gruppe, $H < G$, $H \neq G$. Zeigen Sie:
$G = < G \setminus H >$.

Aufgabe 3:
G sei eine Gruppe der Ordnung 105. Zeigen Sie:
Es gibt einen surjektiven Homomorphismus φ von G auf eine Gruppe der Ordnung 15 oder auf eine Gruppe der Ordnung 21.

Aufgabe 4:
G sei eine Gruppe, $N \triangleleft G$, N auflösbar , $H < G, H$ auflösbar. Zeigen Sie:
$N \cdot H$ ist ein auflösbare Untergruppe von G.

Aufgabe 5:
Welche der folgenden Elemente $f \in R$ sind Primelemente?

a) $f = X^3 + X^2 - 3X - 2, \qquad R = \mathbb{Z}[X].$
b) $f = XY^5 + 2(X+1)Y^3 + (X^2-1)Y + X^{10} - X^7 - X^6 - 1, \quad R = \mathbb{Z}[X,Y].$

Aufgabe 6:
R sei ein Ring mit $1 \neq 0$, in dem $x^2 = x$ gilt für alle $x \in R$. Zeigen Sie:
$\mathfrak{p} \subset R$ Primideal $\Rightarrow \mathfrak{p}$ maximales Ideal.

Aufgabe 7:
R sei ein kommutativer Ring, $N := \{x \in R \mid \exists\ k \in N \text{ mit } x^k = 0\}$ die Menge der nilpotenten Elemente von R.

1. Zeigen Sie: $N \triangleleft R$.
2. Berechnen Sie die nilpotenten Elemente von $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/165\mathbb{Z}$.

Aufgabe 8:
R sei ein Integritätsring, in dem jedes echte Ideal nur endlich viele Elemente hat. Zeigen Sie: R ist ein Körper.