Klausur zur Algebra I

Aufgabe 1:

a) G sei eine Gruppe, die genau ein erzeugendes Element besitzt. Zeigen Sie: $|G| \leq 2$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Ist G eine Gruppe, so daß jede echte Untergruppe von G zyklisch ist, dann ist G zyklisch.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie, daß für $n \geq 3$ das Zentrum von S_n nur aus dem Neutralelement besteht.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 30 besitzt eine normale Sylow–Untergruppe $\neq e$.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 42 auflösbar ist.

Aufgabe 5:
G sei eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie:

$$H < G, |G/H| = p \Rightarrow H \triangleright G.$$

Aufgabe 6:
Berechnen Sie einen ggT der Elemente $v, w \in R$ und ferner $r, s \in R$ mit $r \cdot v + s \cdot w = \mathrm{ggT}(v, w)$.

a) $R = \mathbb{Q}[X]$, $\quad v = X^5 + X^4 - X^3 - 2X - 1$, $\quad w = X^4 - X^3 - X - 1$.
b) $R = \mathbb{Z}$, $\quad v = 15783$, $\quad w = 381$.

Aufgabe 7:
Zeigen Sie, daß die Elemente $p_1 \in R_1$ und $p_2 \in R_2$ Primelemente in den jeweiligen Ringen sind.

a) $R_1 = \mathbb{Q}[X]$, $\quad p_1 = X^5 + 6X^4 + 9X^3 + 3$.
b) $R_2 = \mathbb{Z}[X, Y]$, $\quad p_2 = X^n + Y^n - 1$.

Aufgabe 8:

Sei $f := \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot X^\nu \in \mathbb{Z}[X], \quad a_n \neq 0.$

Seien $r, s \in \mathbb{Z},\ s \neq 0,\ \mathrm{ggT}(r, s) = 1,$ mit $f\left(\frac{r}{s}\right) = 0.$

Zeigen Sie: r / a_0 und s / a_n.

Aufgabe 9:

Zeigen Sie, daß $I := X \cdot \mathbb{Z}[X, Y] + Y \cdot \mathbb{Z}[X, Y]$ ein Primideal in $\mathbb{Z}[X, Y]$ ist, und geben Sie ein maximales Ideal an, das I umfaßt.

Aufgabe 10:

R sei Integritätsring, der nur endlich viele Ideale hat. Zeigen Sie: R ist ein Körper.