Klausur zur Algebra I

WS 93/94 — *Prof. Dr. W. Hein*

---

1. Sei
$$U := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}.$$
Man zeige:
$$\left(\mathbb{C}^\times/U, \cdot\right) \cong \left(\mathbb{R}_+^\times, \cdot\right) \cong (\mathbb{R}, +).$$

2. In $\mathbb{Q}[X]$ seien die Polynome
$$f := X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1, \quad g := X^4 + X^2 + 1$$
gegeben. Man bestimme
   (a) den normierten ggT von f und g in $\mathbb{Q}[X]$;
   (b) die gemeinsamen Nullstellen von f und g in $\mathbb{C}$.

3. Man zeige, daß die folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$ sind:
   (a) $32X^5 + 198374X^4 + 11$;
   (b) $(X + a)^p + ap - a^p$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl mit $p \not| a$ ist.

4. Sei
$$f := X^4 - 5 \in \mathbb{Q}[X].$$
Man bestimme:
   (a) den Zerfällungskörper K von f über $k := \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$;
   (b) die Galoisgruppe $G\,(K/k)$;
   (c) eine Untergruppe U der Ordnung 2 von $G\,(K/k)$ und den zugehörigen Fixkörper $Fix\,(U)$.

5. Sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel.
   (a) Warum ist $K := \mathbb{Q}(\xi)$ galoisch über $k := \mathbb{Q}$?
   (b) Man gebe alle Elemente der Galoisgruppe $G\,(K/k)$ *explizit* an.
   (c) Man bestimme die Untergruppe $U \leq G\,(K/k)$, für die
$$Fix\,(U) = \mathbb{Q}\left(\xi^2 + \xi^3\right)$$
gilt.